

Exercice 19

1) Soit $\mathbb{R}_+^n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}, y > 0\}$ le demi plan supérieur. Soit f harmonique, $\Delta f = 0$, telle que $f \in C(\overline{\mathbb{R}_+^n})$. continue jusqu'au bord $\{y = 0\}$. On définit la fonction F sur \mathbb{R}^n par

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & y \geq 0 \\ -f(x, -y), & y < 0 \end{cases} .$$

On veut calculer ΔF dans $D'(\mathbb{R}^n)$. Par le cours (régularité elliptique), on sait que $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n)$, mais on ne sait pas à priori que $f \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+^n})$. On pourrait appliquer la formule des sauts mais on a besoin que f soit C^1 par morceaux jusqu'à $y = 0$. On va modifier F et définir F_δ pour $\delta \geq 0$ par

$$F_\delta(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & y \geq \delta \\ -f(x, 2\delta - y), & y < \delta \end{cases} .$$

On a clairement que $\lim_{\delta \rightarrow 0} F_\delta = F$ dans L_{loc}^1 et donc $F_\delta \rightarrow F$ dans $D'(\mathbb{R}^n)$. Ainsi on obtient

$$\Delta F_\delta \rightarrow_{\delta \rightarrow 0} \Delta F \text{ dans } D'(\mathbb{R}^n).$$

On sait que $f \in C^\infty$ sur $y > 0$ et donc on peut calculer pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_\delta(x, y) \Delta \varphi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \int_{|y-\delta| > \epsilon} F_\delta(x, y) \Delta \varphi(x, y) dy dx$$

en intégrant par parties pour passer les dérivées sur F_δ (par la formule de Green ou calcul direct, car dans ce cas le bord est simple)

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{|y-\delta| > \epsilon} F_\delta(x, y) \Delta \varphi(x, y) dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{y > \delta + \epsilon} f(x, y) \Delta \varphi(x, y) dy dx - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{y < \delta - \epsilon} f(x, 2\delta - y) \Delta \varphi(x, y) dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{y > \delta + \epsilon} \Delta f(x, y) \varphi(x, y) dy dx + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{y < \delta - \epsilon} (\Delta f)(x, 2\delta - y) \varphi(x, y) dy dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x, \delta + \epsilon) \partial_y \varphi(x, \delta + \epsilon) dx - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x, \delta + \epsilon) \partial_y \varphi(x, \delta + \epsilon) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_y f(\delta + \epsilon) \varphi(x, \delta + \epsilon) dx - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_y f(x, \delta + \epsilon) \varphi(x, \delta + \epsilon) dx. \end{aligned}$$

Les termes Δf sont nuls car f est harmonique. Les termes de bords, quand $\epsilon \rightarrow 0^+$ donnent par le fait que f est C^∞ dans $y > 0$,

$$-2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x, \delta) \partial_y \varphi(x, \delta) dx = 2 \langle \delta_{\{y=\delta\}}^{(1)}, \varphi \rangle.$$

On fait ensuite tendre $\delta \rightarrow 0$, et on a directement pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$

$$\langle \Delta F, \varphi \rangle = 2\langle f(x, 0)\delta_{\{y=0\}}^{(1)}, \varphi \rangle = -2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x, 0)\partial_y \varphi(x, 0) dx$$

donc $\Delta F = 2f(x, 0)\delta_{\{y=0\}}^{(1)}$.

2) On cherche à résoudre le problème de Dirichlet pour $n > 2$

$$\Delta f = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_+^n, \quad f|_{y=0} = g$$

où $g \in C_c(\mathbb{R}^{n-1})$. Soit E la solution élémentaire de Δ

$$\Delta E = \delta_0, \quad E(w) = c_n |w|^{2-n}, \quad w \in \mathbb{R}^n, \quad c_n := \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)}.$$

On a pour tout $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$,

$$\Delta(E \star S) = (\Delta E) \star S = \delta_0 \star S = S.$$

En particulier $\Delta E \star S|_{\mathbb{R}^n \setminus \text{supp}(S)} = 0$ et donc par régularité elliptique $E \star S \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \text{supp}(S))$. De plus, comme $E \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, on peut choisir $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ égal à 1 près de 0, de sorte que $(1 - \chi)E \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, et donc $((1 - \chi)E) \star S \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. On a aussi que $(\chi E) \star S \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ car χE et S sont à support compact. Si on note K le support de $(\chi E) \star S$, on a que

$$(E \star S)|_{\mathbb{R}^n \setminus K} = (((1 - \chi)E) \star S)|_{\mathbb{R}^n \setminus K}.$$

Comme maintenant $T := ((1 - \chi)E) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, on peut écrire

$$(T \star S)(w) = \langle S, T(w - \cdot) \rangle.$$

La variable \cdot est contenue dans $\text{supp}(S)$ qui est compact, et S est d'ordre finie car dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, donc il existe un compact K' , $C > 0$ et $p \in \mathbb{N}$

$$|T \star S(w)| \leq C \|T(w - \cdot)\|_{C^p(K')}.$$

Hors, en utilisant la formule explicite de $E(w)$, on voit que pour $|w| > 1$, on a

$$|\partial_w^\alpha E(w)| \leq C |w|^{2-n-|\alpha|},$$

ce qui implique assez facilement que $T \star S(w) = O(|w|^{2-n})$ quand $|w| \rightarrow \infty$. Ceci montre que $E \star S(w) \rightarrow 0$ quand $|w| \rightarrow 0$. Si on pose

$$f = E \star (2g\delta_{y=0}^{(1)})$$

on a $\Delta f = 2g\delta_{y=0}^{(1)}$ et $f(w) \rightarrow 0$ quand $|w| \rightarrow \infty$. En particulier, $\Delta f = 0$ dans \mathbb{R}_+^n , f est $C^\infty(\mathbb{R}_+^n)$.

On veut montrer que f se prolonge par continuité jusqu'à $y = 0$ et que $f|_{y=0} = g$. On calcule pour $w = (x, y) \in \mathbb{R}_+^n$

$$f(w) = \langle 2g\delta_{y=0}^{(1)}, E(w - \cdot) \rangle = -2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(x') \partial_{y'} E(w - (x', y))|_{y'=0} dx'$$

$$f(w) = -2c_n(n-2)y \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{g(x')}{(|x' - x|^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}} dx'.$$

On observe que $(|x' - x|^2 + y^2)^{-\frac{n}{2}}$ est intégrable sur \mathbb{R}^{n-1} et par un changement de variable $x' = x + yv$ avec $v \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$y \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{(|x' - x|^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}} dx' = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{(|v|^2 + 1)^{\frac{n}{2}}} dv =: b_n.$$

On admet (ça se calcule avec des fonctions de Bessel) que $-2c_n b_n(n-2) = 1$. Dans ce cas on peut écrire

$$f(x, y) - g(x) = -2c_n(n-2)y \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{g(x') - g(x)}{(|x' - x|^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}} dx'.$$

Comme $g \in C_c(\mathbb{R}^{n+1})$, elle est uniformément continue et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|g(x) - g(x')| \leq \epsilon$ si $|x - x'| \leq \delta$. On a donc

$$2|c_n(n-2)y \int_{|x'-x| \leq \delta} \frac{|g(x') - g(x)|}{(|x' - x|^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}} dx' \leq \epsilon.$$

Il reste l'intégrale sur $|x - x'| \geq \delta$: il existe des constantes C, C_δ telles que

$$y \int_{|x'-x| \geq \delta} \frac{|g(x') - g(x)|}{(|x' - x|^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}} dx' \leq C \|g\|_\infty y \int_{|x'-x| \geq \delta} \frac{1}{(|x' - x|^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}} dx'$$

$$\leq C \|g\|_\infty y \int_{|v| \geq \delta} \frac{1}{|v|^n} dv \leq C_\delta y \|g\|_\infty$$

qui est $< \epsilon$ si y est choisi assez petit (dépendant de ϵ). On a montré que $f(x, y) \rightarrow g(x)$ quand $y \rightarrow 0$.

Le problème de Dirichlet ci dessus a une unique solution $f(w)$ (que l'on vient de construire) si on suppose qu'elle tend vers 0 quand $|w| \rightarrow \infty$. En effet, la différence de 2 solutions est harmonique sur \mathbb{R}_+^n , et elle s'annule sur le bord $y = 0$, donc en utilisant la question 1), on peut construire F en symétrisant F , et $F(w)$ est alors une fonction harmonique sur \mathbb{R}^n qui tend vers 0 quand $|w| \rightarrow \infty$. Par le principe du maximum sur des boules $|w| = R$ avec $R \rightarrow \infty$, on déduit que $F = 0$ (théorème de Liouville).