FORMAS MODULARES Y OPERADORES DE HECKE

ROBERTO J. MIATELLO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA, ARGENTINA

AGRA II, 10-21 AGOSTO 2015

Resumen. Las presentes notas contienen una introducción a las formas modulares desde el punto de vista clásico. En ellas se dan las principales propiedades enfatizando el rol de los coeficientes de Fourier. Se trata en general de dar las demostraciones de los resultados, para facilitar la lectura. Como principales ejemplos se estudian las series de Eisenstein y las series theta. Se describe en detalle la estructura del álgebra de formas modulares en el caso del grupo $\Gamma(1) = SL_2(\mathbb{Z})$. Finalmente se estudian los operadores de Hecke para el grupo $\Gamma(1) = SL_2(\mathbb{Z})$, presentando luego una generalización a los grupos de Hecke $\Gamma_0(N)$. Se estudian las propiedades de las autoformas de Hecke y de las funciones L de Hecke asociadas, las cuales admiten productos de Euler. El objetivo es servir de base a los aspectos más avanzados de la teoría a ser presentados en las restantes exposiciones sobre curvas de Shimura. Las principales referencias son [Se73], [Sh71], [IK04] y [DS05].

1. Grupos Fuchsianos

Una superficie de Riemann es una variedad diferenciable compleja conexa de dimension compleja 1. De acuerdo a un teorema clásico de Riemann-Koebe, hay sólo tres superficies de Riemann simplemente conexas, el plano complejo $\mathbb{C}$, el semiplano superior H y la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C}P^1$.

El semiplano superior H es el cubrimiento universal de la 'gran mayoría' de las superficies de Riemann, en particular de todas las superficies compactas con género $g \geq 2$.

Los grupos $SL_2(\mathbb{R})$ y $GL_2(\mathbb{R})^+$ actúan transitivamente en H por transformaciones de Moebius y por lo tanto se tienen los difeomorfismos $H \simeq SL_2(\mathbb{R})/SO(2,\mathbb{R})$ o $H \simeq GL_2(\mathbb{R})^+/\mathbb{R}^\times SO(2,\mathbb{R})$, dado que $SO(2,\mathbb{R})$ es el subgrupo de isotropía de i en $SL_2(\mathbb{R})$ y de modo similar para $\mathbb{R}^\times SO(2,\mathbb{R})$ en $GL_2(\mathbb{R})^+$.

Además H tiene una estructura Riemanniana dada por $g = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$ y el operador de Laplace asociado a la estructura Riemanniana está dado por $y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$.

Un *grupo Fuchsiano de* 1^a *clase* es un subgrupo discreto $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{R})$ que tiene covolumen finito. Estos grupos fueron introducidos y estudiados por Henri Poincaré y son sumamente interesantes.

Una *región fundamental* $\mathcal{F}$ de Γ es un subconjunto abierto de H tal que (i) cada $z \in H$ es equivalente por algún $\gamma \in \Gamma$ a algún $z' \in \overline{\mathcal{F}}$ y (ii) si dos elementos $z, z' \in \mathcal{F}$ son Γ-equivalentes, entonces $z, z' \in \partial\mathcal{F}$.

Se prueba que todo grupo Fuchsiano de 1^a clase tiene una región fundamental $\mathcal{F}$ que es un polígono hiperbólico con finitos lados. El ejemplo típico de tales grupos es $SL_2(\mathbb{Z})$ y los llamados subgrupos de congruencia que definimos a continuación.

Ejemplo 1.1. Consideremos, para $N \in \mathbb{N}$, fijo, $\Gamma(N)$ el *subgrupo principal de congruencia de nivel* N y $\Gamma_0(N)$, *el subgrupo de Hecke de nivel* N. Esto es

$$\Gamma(N) = \{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) : \gamma \equiv Id \mod N\}, \tag{1.1}$$

$$\Gamma_0(N) = \{\gamma = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in SL_2(\mathbb{Z}) : c \equiv 0 \mod N\}. \tag{1.2}$$

Si $N = 1$, $\Gamma(N)$ y $\Gamma_0(N)$ coinciden con $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$. En caso en que $N = 2$,

$$\Gamma(2) = \{\gamma = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in SL_2(\mathbb{Z}) : b, c \equiv 0 \mod 2\}$$

es un subgrupo de índice 6 de $SL_2(\mathbb{Z})$ y $\Gamma_0(2)$ es un subgrupo de índice 2.

La región fundamental usual de Γ es $\mathcal{F} = \{z : |Re(z)| < \frac{1}{2}, |z| > 1\}$. Para obtener regiones fundamentales $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ para $\Gamma(2)$ y $\Gamma_0(2)$ respectivamente, es suficiente encontrar elementos que representen las coclases a izquierda (o a derecha) de tales grupos en Γ, teniendo en cuenta que Γ está generado por los elementos $S = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ y $T = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ y trasladar $\mathcal{F}$ por estos elementos (ejercicio). Se pueden construir regiones $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ polígonos hiperbólicos con 4 y 3 lados respectivamente. Los puntos de intersección con el eje real y el punto i_∞ corresponden a las llamadas cúspides de Γ. Son puntos fuera de H que deben ser agregados a $\Gamma\backslash H$ para compactificar este espacio.

Ejemplo 1.2. Los ejemplos anteriores tienen regiones fundamentales no compactas. Un ejemplo de distinta naturaleza es el siguiente. Sean $n, p \in \mathbb{N}$, con p primo tal que n no es un cuadrado $\bmod p$. Sea

$$\Gamma(n,p) = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} a+b\sqrt{n} & (c+d\sqrt{n})p \\ (c-d\sqrt{n})p & a-b\sqrt{n} \end{smallmatrix}\right] : a^2 - b^2 n - c^2 p + d^2 np = 1 \right\}. \tag{1.3}$$

Se verifica que $|\mathrm{tr}\gamma > 2|$ para todo $\gamma \in \Gamma$ (ejercicio), lo que implica que $\Gamma(n,p)\backslash H$ es una superficie compacta. Estos grupos provienen de álgebras de cuaterniones y tendrán un rol central en las exposiciones sobre curvas de Shimura.

1.1. Cúspides. Cada $g \in SL_2(\mathbb{R})$ tiene uno o dos puntos fijos en $\mathbb{C}^\times$; g se dice *parabólica* si tiene un único punto fijo, *hiperbólica* si tiene dos puntos fijos en $\mathbb{R} \cup i_\infty$ y *elíptica* si posee dos puntos fijos conjugados, $w, \bar{w}$ no reales. Dejamos como ejercicio verificar que $g = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ es parabólica sii $|a + d| = 2$, hiperbólica sii $|a + d| > 2$ y elíptica sii $|a + d| < 2$. Puede darse una interpretación geométrica: g es parabólica sii es conjugada a una traslación $\left[\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, hiperbólica sii g es conjugada a una dilatación $\left[\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\right]$ y elíptica sii g es conjugada a una rotación $\left[\begin{smallmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right]$. El único punto fijo de una traslación es ∞, que denotaremos por i_∞.

Si $\gamma \in \Gamma$ es parabólico, $r \in \mathbb{R} \cup i_\infty$ su punto fijo y $\beta \in \Gamma$, entonces $r' = \beta \cdot r$ es fijo por $\beta g \beta^{-1} \in \Gamma$ el cual es también parabólico. En este caso se dice que r y $\beta \cdot r$ son vértices equivalentes. Luego Γ actúa en el conjunto $\mathcal{C} \subset \mathbb{R} \cup i_\infty$ de vértices parabólicos de G y cada clase de equivalencia de $\mathcal{C}$ se llama una *cúspide* de Γ. Frecuentemente identificaremos a cada vértice parabólico v con su clase de equivalencia y diremos que v es una cúspide de Γ.

Se prueba que el número de cúspides en un grupo Fuchsiano de 1^a clase es finito. El espacio $\overline{H} = H \cup \mathcal{C}$ puede ser munido de una topología Hausdorff y Γ actúa continuamente en $\overline{H}$ por transformaciones de Möbius. Además, el cociente $\Gamma \backslash \bar{H}$ tiene estructura de superficie de Riemann compacta, obtenida por adición a $\Gamma \backslash H$ de las cúspides de Γ, cuando las hay.

2. Formas modulares

Sea, para $g \in GL_2(\mathbb{R})$, $z \in H$, $j(g, z) = cz + d$, si $g = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$. La función $j(g, z)$ es un cociclo, esto es, satisface la propiedad $j(g_1 g_2, z) = j(g_1, g_2 z) j(g_2, z)$, para $g_1, g_2 \in G$ y z en H (verificar).

Definamos para $f : H \to \mathbb{C}$, $\delta \in SL_2(\mathbb{R})^+$ y $k \in \mathbb{N}$,

$$f|\delta(z) = j(\delta, z)^{-k} f(\delta z) \tag{2.1}$$

La propiedad del cociclo de $j(\gamma, z)$ se traduce en la propiedad $f|\delta_1\delta_2 = f|\delta_1|\delta_2$, esto es, la correspondencia $f \to f|\delta$ es una acción a derecha (verificar).

Definición 2.1. Dado un grupo Fuchsiano de primera clase G, una *forma modular de peso k* para G es una función holomorfa $f : H \to \mathbb{C}$ tal que

$$f(\gamma z) = j(\gamma, z)^k f(z) \tag{2.2}$$

para todo $\gamma \in \Gamma$, $z \in H$ que además es holomorfa en las cúspides. Equivalentemente, en la notación en (2.1), la condición (2.2) se expresa por $f|\delta = f$ para todo $\delta \in \Gamma$.

La última condición en la definición de forma modular significa lo siguiente. Si Γ contiene una traslación es decir un elemento de la forma $g = \left[\begin{smallmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, equivalentemente, si i_∞ es una cúspide, entonces (2.2) implica que $f(z+h) = f(z)$ para todo $z \in H$. Por lo tanto se tiene que

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(f)\, e^{2\pi i \left(\frac{nz}{h}\right)}\,. \tag{2.3}$$

La holomorfía de f en i_∞ significa que $a_n(f) = 0$ para todo $n < 0$. Los coeficientes $a_n(f)$ se llaman los *coeficientes de Fourier* de f en i_∞ y la expansión (2.3) se llama la *expansión de Fourier* de $f(z)$ en i_∞. Para $SL_2(\mathbb{Z})$

o $\Gamma_0(2)$ se tiene que $h = 1$ y para $\Gamma = \Gamma(2)$ es $h = 2$. Usaremos con frecuencia la notación corriente $q = e^{2\pi i z}$.

Para analizar los desarrollos de Fourier en las restantes cúspides se procede por reducción al caso anterior. Si r es una cúspide de Γ fija por el elemento parabólico $\gamma \in \Gamma$, sea $g \in SL_2(\mathbb{R})$ tal que $g \cdot r = i_\infty$. Se tiene entonces que i_∞ es una cúspide del grupo $g\Gamma g^{-1}$ y el requerimiento de holomorfía de f en r consiste en pedir que la forma modular $f|g$ (asociada al grupo $g\Gamma g^{-1}$) sea holomorfa en i_∞. Si $a_0 = 0$ para todas las cúspides de Γ se dice que f es una *forma cuspidal* de peso k.

Denotaremos por $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ al espacio de formas Γ-modulares de peso k y por $\mathcal{S}_k(\Gamma)$ al subespacio de $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ de formas Γ-cuspidales. Si $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$, escribiremos simplemente $\mathcal{M}_k$ y $\mathcal{S}_k$.

Las formas modulares son objetos naturales que aparecen muy frecuentemente en matemática; se corresponden con secciones holomorfas de fibrados lineales naturales sobre la superficie de Riemann $\Gamma\backslash\overline{H}$ (ver [Sh71]).

2.1. Series de Eisenstein y series theta. Entre los ejemplos más comunes de formas modulares, están las series de Eisenstein y las series theta.

Series de Eisenstein. Sea $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$. Es fácil verificar que si k es impar la única forma modular es $f = 0$, luego supondremos que el peso es par e igual a $2k$. Sea

$$G_{2k}(z) = \sum\nolimits'_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}(mz+n)^{-2k} \tag{2.4}$$

donde ' indica omitir $(0,0)$ en la suma. Se prueba que la serie converge absolutamente y uniformemente sobre compactos y por lo tanto define una función holomorfa en H. Ahora bien,

$$\begin{aligned} G_{2k}(\gamma z) &= \sum\nolimits'_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}\left(m\left(\tfrac{az+b}{cz+d}\right)+n\right)^{-2k} \\ &= (cz+d)^{2k}\sum\nolimits'_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}(m(az+b)+n(cz+d))^{-2k} \\ &= (cz+d)^{2k}\sum\nolimits'_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}((ma+nc)z+(mb+nd))^{-2k} \\ &= (cz+d)^{2k}G_{2k}(z)\,, \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde la última igualdad vale porque $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$. Esto que prueba la modularidad de $G_{2k}(z)$. Para probar que $G_{2k}(z)$ es una forma modular de peso $2k$, resta ver el desarrollo de Fourier de G_{2k} en i_∞. Hallaremos este desarrollo a continuación, mostrando que los coeficientes de Fourier involucran la función $\sigma_h(n)$. En este caso Γ tiene a i_∞ como única cúspide.

Recordemos el desarrollo

$$\pi\,\cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+m} + \frac{1}{z-m}\right) \tag{2.6}$$

con convergencia uniforme sobre compactos en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Por otra parte

$$\pi \cot \pi z = \pi i \frac{e^{2\pi i z}+1}{e^{2\pi i z}-1} = \pi i + 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi i n z}\,.$$

Luego, derivando $k-1$ veces obtenemos para todo $k \geq 2$

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+m)^k} = \frac{(k-1)!}{(-2\pi i)^k} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1}\, e^{2\pi i n z}. \tag{2.7}$$

Proposición 2.2. *Se tiene, para todo $k \geq 2$,*

$$G_{2k}(z) = 2\zeta(2k) + \frac{2(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n\geq 1} \sigma_{2k-1}(n)\, e^{2\pi i n z} \tag{2.8}$$

donde $\sigma_h(n) = \sum_{d|n} d^h$ para $h \in \mathbb{N}_0$.

Demostración. Usando (2.7) se obtiene,

$$\begin{aligned} G_{2k}(z) &= \sum_{(n,m)\neq(0,0)} \frac{1}{(nz+m)^{2k}} \\ &= 2\zeta(2k) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(nz+m)^{2k}} \\ &= 2\zeta(2k) + \frac{2(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{d=1}^{\infty}\sum_{h=1}^{\infty} d^{2k-1}\, e^{2\pi i h d z} \\ &= 2\zeta(2k) + \frac{2(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n)\, e^{2\pi i n z}\,. \end{aligned} \tag{2.9}$$

□

Nota 2.3. Se suele normalizar G_{2k}, poniendo $E_{2k} = (2\zeta(2k))^{-1} G_{2k}(z)$. En esta notación resulta que

$$\begin{aligned} E_4(z) =& 1 + 240 \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n \\ E_6(z) =& 1 + 504 \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^n \\ E_8(z) =& 1 + 480 \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_7(n) q^n \end{aligned} \tag{2.10}$$

donde $q = e^{2\pi i z}$. Con estas normalizaciones, teniendo en cuenta la estructura del álgebra de formas modulares para $SL_2(\mathbb{Z})$, a ser descripta en la próxima subsección (en particular que $\mathcal{S}_{2k} = 0$ si $k < 6$ y $\dim \mathcal{M}_8 = \dim \mathcal{M}_{10} = 1$), se obtienen las identidades

$$E_4^2 = E_8, \qquad E_6 E_4 = E_{10}$$

las que implican

$$\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{i=1}^{m-1} \sigma_3(m)\sigma_3(n-m) \tag{2.11}$$

$$11\sigma_9(n) = 21\sigma_5(n) - 10\sigma_3(n) + 5040 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(n)\sigma_5(n-m)\,. \tag{2.12}$$

Para pesos mayores las relaciones son más complicadas. En general, dado $k \geq 2$, k admite una expresión, o más, $k = 2\alpha + 3\beta$ con $\alpha, \beta \geq 0$ y en este caso se tiene que

$$E_{2k} = E_4^\alpha E_6^\beta + f$$

con $f \in \mathcal{S}_{2k}$.

Series theta. A continuación pasamos a considerar otro ejemplo típico: el caso de las llamadas *series theta*. Dado L un retículo en $\mathbb{R}^n$ sea

$$\theta_L(z) = \sum_{\beta \in L} e^{\pi i \|\beta\|^2 z} \tag{2.13}$$

Notamos que $|e^{\pi i \|\beta\|^2 z}| = e^{-\pi \|\beta\|^2 y}$ lo cual sugiere que la serie anterior converge uniformemente sobre compactos en H y por lo tanto $\theta_L(z)$ es una función holomorfa. Además, bajo ciertas condiciones, $\theta_L(z)$ satisface una relación de modularidad para $SL_2(\mathbb{Z})$. Dado L, el retículo dual de L es $L' = \{v \in \mathbb{R}^n : \beta.v \in \mathbb{Z},\ \forall\, \beta \in L\}$. Un retículo L se dice *autodual* si $L = L'$ y se dice *par* si $\|\beta\|^2 \in 2\mathbb{Z}$ para todo $\beta \in L$. Notar que si $L = L'$ entonces $\mathrm{vol}(L) = 1$. Nuestro objetivo es probar

Teorema 2.4. *Si $n = 8k$, y $L = L'$ es par entonces $\theta_L(z) \in \mathcal{M}_{4k} \smallsetminus \mathcal{S}_{4k}$.*

Demostración. Para verificar la condición (2.2) es suficiente hacerlo para $S(z) = -\frac{1}{z}$ y $T(z) = z + 1$ pues S y T generan $SL_2(\mathbb{Z})$. Como L es par $\theta_L(z)$ es claramente T-invariante. Queda por ver que $\theta_L(-\frac{1}{z}) = z^{4k}\theta_L(z)$. Por holomorfía basta verificar para todo $z = it$ con $t > 0$ que $\theta_L\,(i/t) = t^{4k}\theta_L(it)$. Es decir, hay que probar la identidad:

$$\sum_{\beta \in L} e^{-\pi \|\beta\|^2/t} = t^{4k} \sum_{\beta \in L} e^{-t\pi \|\beta\|^2} \text{ para todo } t > 0. \tag{2.14}$$

Esta identidad es consecuencia de la conocida fórmula de sumación de Poisson que afirma que dada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ el espacio de Schwartz y L un retículo en $\mathbb{R}^n$ es válida la siguiente identidad:

$$\sum_{\beta \in L} f(\beta) = \mathrm{vol}(L)^{-1} \sum_{\beta' \in L'} \hat{f}(\beta'), \tag{2.15}$$

donde $\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x.y} f(x)\, dx$ es la transformada de Fourier de f, y L' es el retículo dual de L.

Tomemos la función $f(x) = e^{-\pi \|x\|^2}$ para $x \in \mathbb{R}^n$. Es un hecho conocido que $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ satisface $\hat{f}(x) = f(x)$.

Para $t \in \mathbb{R}^+$ sea $L_t = \sqrt{t}L$. Entonces $(L_t)' = t^{-1/2}L$, luego $\mathrm{vol}(L_t) = t^{4k}\mathrm{vol}(L)$. Aplicando directamente (2.15) con $f(x) = e^{-\pi\|x\|^2}$ se obtiene (2.14) de la cual resulta la modularidad de $\theta_L(z)$. Observamos que de la propia definición resulta que

$$\theta_L(z) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} r_{2m}(L)\, e^{2m\pi i z}, \tag{2.16}$$

donde $r_{2m}(L) = \{\beta \in L : \|\beta\|^2 = 2m\}$, el número de representaciones de $2m$ por la forma cuadrática $\|x\|^2$ en $\mathbb{R}^n$. Esto da el desarrollo de Fourier de $\theta_L(z)$ en i_∞. □

Los desarrollos de Fourier de las series de Eisenstein y las series theta muestran que ambas series definen formas no cuspidales e ilustran el hecho general de que los coeficientes de Fourier de las formas modulares suelen ser funciones aritméticas importantes. La acotación de los coeficientes de Fourier es también un problema clásico importante.

2.2. Estructura de $\mathcal{M}_{2k}$ y $\mathcal{S}_{2k}$. Los espacios de formas modulares para $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ tienen una estructura algebraica muy precisa que describiremos en esta subsección. Para comenzar, observamos las siguientes afirmaciones que son de rápida verificación:

(i) Si $f \in \mathcal{M}_{2k}, g \in \mathcal{M}_{2h}$, se tiene que $fg \in \mathcal{M}_{2(k+h)}$. En particular, el espacio $\mathcal{M} := \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{M}_{2k}$ es una $\mathbb{C}$-álgebra graduada.

(ii) Si $f, g \in M_{2k}$, existen $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tales que $\lambda f + \mu g \in \mathcal{S}_{2k}$. Es decir S_{2k} tiene codimensión 1 en $\mathcal{M}_{2k}$.

(iii) $\mathcal{M}_{2k} = \mathcal{S}_{2k} \oplus \mathbb{C}G_{2k}$.

Para continuar, necesitamos hacer uso de un resultado que es consecuencia del teorema de los residuos esencialmente (ver [Se73]). Si $p \in H \cup i_\infty$, sea $v_p(f)$ el orden de f en p y como anteriormente, denotamos $\rho = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$.

Teorema 2.5. *Si f es una forma modular de peso $2k$, $f \neq 0$ entonces*

$$v_{i_\infty}(f) + \frac{1}{3}v_\rho(f) + \frac{1}{2}v_i(f) + \sum_{p \neq \rho, i_\infty} v_p(f) = \frac{k}{6}\,. \tag{2.17}$$

Éste es el hecho principal que permite describir la estructura del álgebra de las formas modulares.

Como ilustración, examinemos la ecuación (2.17) en los casos de G_4, G_6 y G_8. Para G_4 el miembro de la derecha da $\frac{1}{3}$, luego necesariamente $v_p(f) = 0$ para $p \neq \rho$ y $v_\rho(f) = 1$, es decir G_4 tiene un cero simple en ρ y no posee otros ceros. Similarmente G_6 posee un único cero simple en $p = i$ y G_8 posee un único cero doble en $p = \rho$ al igual que G_4^2. Esto implica necesariamente que existe una constante c tal que $G_8 - cG_4^2 = 0$ pues de lo contrario tendría más ceros que los permitidos por la ecuación (2.17). Con argumentos similares se deduce que $\mathcal{M}_2 = 0$ y $\mathcal{M}_{2k} = \mathbb{C}G_{2k}$ si $k = 2, 3, 4, 5$. Si $k = 6$ observamos, usando el desarrollo de Fourier, que la forma $\Delta = 60G_4^3 - 140G_6^2$ tiene $a_0 = 0$, es decir es una forma cuspidal no nula de peso 12 con un único cero en i_∞ (necesariamente simple, por (2.17)). Es fácil ver que M_{12} está generado por Δ y G_4^3 (ó equivalentemente por Δ y G_6^2, ó Δ y G_{12}).

Consideremos, para $f \in \mathcal{M}_{2k}$, $k \geq 1$, la transformación lineal $\Phi : f \to \Delta f \in \mathcal{S}_{2k+12}$. Claramente Φ es inyectiva pues $\Delta \neq 0$. Por otra parte, si $g \in \mathcal{S}_{2k+12}$, se tiene que $f := g/\Delta$ es analítica en i_∞ (pues Δ tiene ahí un cero simple), de peso $2k$, y $\Phi(f) = g$. Luego se obtiene que Φ es un isomorfismo. Resumiendo

Proposición 2.6. *Si $k \geq 2$ se tiene:*

(i) *La aplicación $\Phi : \mathcal{M}_{2k} \to \mathcal{S}_{2k+12}$, dada por $\Phi(f) = \Delta f$ es un isomorfismo.*

(ii) $\dim(\mathcal{M}_{2k}) = \begin{cases} [k/6] & \textit{si } k \equiv 1 \mod 6 \\ [k/6]+1 & \textit{si } k \not\equiv 1 \mod 6 \end{cases}$

(iii) $\mathcal{M} \simeq \mathbb{C}[G_4, G_6]$ *como $\mathbb{C}$-álgebra graduada.*

Demostración. La primera afirmación ya fue probada. Para la segunda observamos que la igualdad vale si $k \leq 6$ y ambos miembros aumentan 1 al cambiar k por $k+6$, por (i).

Pasamos a la prueba de (iii) que también es consecuencia del Teorema 2.5. En primer lugar, veamos que los elementos de la forma ${G_4}^\alpha {G_6}^\beta$ con $k = 2\alpha+3\beta$ generan $\mathcal{M}_{2k}$. Ahora bien, fijo $k > 0$, existen $\alpha \geq 0$ y $\beta \geq 0$ tales que $k = 2\alpha+3\beta$ (ejercicio). Por lo tanto, existe $c \neq 0$ tal que $G_{2k} = c{G_4}^\alpha {G_6}^\beta$. Como $\mathcal{M}_{2k} = \mathbb{C}G_{2k} \oplus \mathcal{S}_{2k}$, restaría probar que los elementos de la forma ${G_4}^\alpha {G_6}^\beta$ con $k = 2\alpha + 3\beta$ generan $\mathcal{S}_{2k}$. Esto se prueba por inducción. Es válido para $0 < k \leq 6$ y siendo válido para $\mathcal{S}_{2k-12}$, lo es también para $\mathcal{S}_{2k} = \Delta \mathcal{S}_{2k-12}$ pues $\Delta = 60{G_4}^3 - 140{G_6}^2$. Para concluir falta ver que G_4 y G_6 son algebraicamente independientes. Supongamos que

$$\sum_{2\alpha+3\beta=k} c_{\alpha,\beta} {G_4}^\alpha {G_6}^\beta = 0.$$

Si G_6 aparece en todos los términos con coeficientes no nulos, G_6 se puede simplificar y queda

$$\sum_{2\alpha+3(\beta-1)=k-3} c_{\alpha,\beta} {G_4}^\alpha {G_6}^{\beta-1} = 0.$$

Por hipótesis inductiva, $c_{\alpha,\beta} = 0$ para todo α, β, una contradicción. Si G_6 no aparece en algún término, o sea $c_{\alpha,0} \neq 0$, evaluando en $z = i$ se obtiene $c_{\alpha,0} = 0$, un absurdo. $\square$

Definición 2.7. La función $j(z) = 1728 G_4(z)^3/\Delta(z)$ es una forma modular de peso 0 con un único polo simple en i_∞.

Un hecho importante es que $j(z)$ define una biyección de $\Gamma \backslash \overline{H}$ en $\hat{\mathbb{C}}$. Notemos que $\Delta(z)$ tiene un único cero simple en i_∞, luego $j(z)$ tiene un polo simple en i_∞ y no tiene otros polos. Siendo cociente de formas de peso 12, $j(z)$ es forma modular de peso 0, con un único cero (de orden 3) en $z = \rho$. Según (2.17) tenemos $-1 + 3.\frac{1}{3} = 0$ y no puede haber otros ceros.

Si planteamos para $\alpha \in \mathbb{C}$ la ecuación $j(z)-\alpha = 0$ (2.17) nos da $-1+1=0$ si $\alpha = j(u), u \neq i, \rho$ y $-1+2\frac{1}{2} = 0$ si $\alpha = j(i)$ y $-1+3\frac{1}{3} = 0$ si $\alpha = 0$, $z = \rho$. Luego $j : \Gamma\backslash H \to \mathbb{C}$ es una biyección, excepto que 0 se toma con multiplicidad 3 y $j(i)$ con multiplicidad 2. Esta situación es coincidente con la estructura de superficie de $\Gamma\backslash H$ en entornos de ρ e i respectivamente, luego j induce la biyección que se afirma.

Proposición 2.8. *Si f es meromorfa en H, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(i) *f es una función Γ-modular de peso* 0.
(ii) *f es cociente de dos formas Γ-modulares del mismo peso.*
(iii) *f es una función racional de j.*

Dejamos la prueba como ejercicio para el lector.

Nota 2.9. El desarrollo de Fourier de $j(z)$ tiene la forma $j(z) = q^{-1} + 744 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(j)q^n$, donde los coeficientes $a_n(j)$) son números enteros conectados con las dimensiones de representaciones irreducibles de ciertos grupos finitos simples (moonshine de Conway-Norton, Borcherds).

Nota 2.10. Las formas modulares G_4 y G_6 tienen un rol importante en la teoría de curvas elípticas. En efecto, cada retículo L en $\mathbb{C}$ define un toro complejo T_L y dos toros complejos $T_L, T_{L'}$asociados a L y L' son biholomorfos si y sólo si $L' = zL$ para algún $z \in \mathbb{C}$. Alternativamente, si se toma $L = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$, $L' = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau'$ con $\tau, \tau' \in H$, se prueba que T_L y $T_{L'}$ son biholomorfos si y sólo si $\tau' = \gamma\tau$ para algún $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$. En efecto, como $\tau' = a\tau + b$ y $1 = c\tau + d$, con $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in SL_2(\mathbb{Z})$ se tiene que $\tau' = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$.

En otras palabras, el espacio cociente $\Gamma\backslash H$ parametriza las estructuras complejas en el toro T^2 salvo biholomorfismo, es el llamado *espacio de moduli* de superficies de Riemann de género 1.

Paralelamente, para cada L existe un embedding $\Psi : T_L \to \mathbb{C}P(2)$, definido por la correspondencia $z \to [(\mathfrak{p}(z), \mathfrak{p}'(z), 1)]$, si $z \notin L$ y $z \to [(0,1,0)]$ si $z \in L$, donde $\mathfrak{p}(z)$ es la función $\mathfrak{p}$ de Weierstrass asociada al retículo $L = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$. Como es bien conocido, $\mathfrak{p}(z)$ y $\mathfrak{p}'(z)$ satisfacen la ecuación $\mathfrak{p}(z)'^2 = 4\mathfrak{p}(z)^3 - g_2(\tau)\mathfrak{p}(z) - g_3(\tau)$, donde $g_2(\tau) = 60G_4(\tau)$ y $g_3(\tau) = 140G_6(\tau)$ con $\Delta(\tau) = g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2 \neq 0$, para todo $\tau \in H$. La función Δ es llamada función discriminante, corresponde al discriminante de la curva elíptica.

Por consiguiente, la imagen del embedding Ψ es la curva elíptica no singular de ecuación $y^2 = 4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau)$. Inversamente, se prueba que para toda curva elíptica no singular E de ecuación $y^2 = 4x^3 - c_2x - c_3$ existe un retículo $L = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ tal que $c_2 = g_2(\tau)$ y $c_3 = g_3(\tau)$. Precisamente en la prueba de este hecho se usa la suryectividad de la función $j(z)$ definida anteriormente.

Nota 2.11. Aprovechamos para hacer mención de la famosa conjetura de Taniyama que afirma que si E es una curva elíptica sobre $\mathbb{Q}$, entonces

$L(E,s) = L_f(s)$ para alguna autoforma normalizada de peso 2 para $\Gamma_0(N)$, donde N es el conductor de E. Una descripción vaga fue sugerida por Taniyama en los años 50, luego promovida por Shimura en los años 60 y por Weil en 1967 ([We67]), quien dio fuertes evidencias de su validez. Como es posible dar una lista de autoformas normalizadas de peso 2 par a $\Gamma_0(N)$ para cada N fijo, la conjetura predice cuántas curvas elípticas con conductor N hay sobre Q. Búsquedas con computadora han confirmado este número para pequeños valores de N.

Como se sabe, la conjetura fue probada para la mayoría de las curvas elípticas por Wiles, Taylor y Diamond (1995), lo que implica el último teorema de Fermat (Ribet) y luego para toda curva elíptica no singular sobre $\mathbb{Q}$, por Breuil, Conrad, Diamond y Taylor (2001). Actualmente este resultado está comprendido en el programa de Langlands, que (vagamente) predice que todas las series de Dirichlet provenientes de las variedades algebraicas (o más generalmente de 'motivos') ocurren como funciones L de representaciones automorfas de grupos algebraicos reductivos.

3. Operadores de Hecke

El objetivo de esta sección es estudiar los operadores de Hecke $T_n, n \in \mathbb{N}$, actuando en $\mathcal{M}_{2k}(\Gamma)$ con $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$. Probaremos que estos operadores generan un álgebra conmutativa $\mathcal{H}$ de operadores autoadjuntos en $\mathcal{S}_{2k}(\Gamma)$. La familia se puede diagonalizar simultáneamente y las autofunciones comunes de tales operadores, llamadas *autoformas* de Hecke, son formas modulares con propiedades especiales, así como sus autovalores $\lambda(n)$. Por su mayor simplicidad, desarrollaremos en detalle el caso en que $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ y al final describiremos los cambios necesarios para la generalización a los subgrupos de Hecke $\Gamma_0(N)$, resultados debidos a Atkin-Lehner([AL70]).

Definición 3.1. Si $n \in \mathbb{N}$ sea $\mathbb{M}_n = \{g \in M_2(\mathbb{Z}) : det(g) = n\}$. Si $f \in \mathcal{M}_{2k}(\Gamma)$, se define el operador de Hecke T_n por

$$T_n(f) = n^{2k-1} \sum_{\delta \in \Gamma \backslash \mathbb{M}_n} f|\delta \tag{3.1}$$

donde δ recorre un sistema completo de representantes de $\mathbb{M}_n$ módulo $SL_2(\mathbb{Z})$.

Claramente $T_n(f)$ no depende del sistema de representantes, es holomorfa en H y además, si $\gamma \in \Gamma$, entonces

$$T_n(f)|\gamma = n^{2k-1} \sum_{\delta \in SL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{M}_n} f|\delta\gamma = T_n(f).$$

Para concluir que $T_n(f)$ es una forma modular de peso $2k$ hay que analizar la expansión de Fourier en i_∞.

Proposición 3.2. *Sea $f \in \mathcal{M}_{2k}(\Gamma)$, $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(f) q^m$. Entonces*

$$T_n(f)(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{d|(m,n)} d^{2k-1} a_{\frac{nm}{d^2}}(f) \right) q^m \tag{3.2}$$

es decir $a_m(T_n(f)) = \sum_{d|(m,n)} d^{2k-1} a_{\frac{nm}{d^2}}(f)$, para cada $m \geq 0$.

Demostración. Dada $\delta \in \mathbb{M}_n$ existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma\delta = \left[\begin{smallmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{smallmatrix}\right]$ (ejercicio). Además multiplicando a izquierda por $\pm \left[\begin{smallmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ se puede modificar b' a $b' + dr$. Luego basta trabajar con matrices triangulares tales que $ad = n, a > 0$ y $0 \leq b < d$. Se verifica que dos tales matrices no difieren por multiplicación a izquierda por $\gamma \in \Gamma$, salvo que sean iguales, luego constituyen un sistema comppleto de representantes.

Por lo tanto se tiene

$$\begin{aligned} T_n(f)(z) &= n^{2k-1} \sum_{ad=n, ad>0} \sum_{b=0}^{d-1} d^{-2k} f\left(\frac{az+b}{d}\right) \\ &= n^{2k-1} \sum_{ad=n, ad>0} \sum_{b=0}^{d-1} d^{-2k} \left(\sum_{m \geq 0} a_m \, e^{2\pi i m \left(\frac{az+b}{d}\right)} \right) \\ &= n^{2k-1} \sum_{ad=n, ad>0} d^{-2k+1} \left(\sum_{m' \geq 0} a_{m'd} \, e^{2\pi i m' a z} \right) \\ &= \sum_{m'' \geq 0} \left(\sum_{a|(n,m'')} a^{2k-1} a_{\frac{m'' n}{a^2}} \right) q^{m''} . \end{aligned} \tag{3.3}$$

En la tercera identidad se han cancelado los términos tales que $d \nmid m$, pues la suma de $b = 0$ a $b = d - 1$ se anula. Luego se ha reemplazado $m'' = m'a$.

En particular, $a_0(T_n(f)) = \left(\sum_{a|n} a^{2k-1} \right) a_0(f) = \sigma_{2k-1}(n) a_0(f)$. □

Corolario 3.3. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y $2k \geq 0$. Entonces T_n preserva $\mathcal{M}_{2k}(\Gamma)$ y $\mathcal{S}_{2k}(\Gamma)$.*

Corolario 3.4. *Si p es primo,*

$$a_m(T_p(f)) = \begin{cases} p^{2k-1} a_{\frac{m}{p}}(f) + a_{mp}(f), & si\ p \mid m \,, \\ a_{mp}(f), & si\ p \nmid m \end{cases} . \tag{3.4}$$

Bajo la convención de que $a_{\frac{m}{p}}(f) = 0$ si $p \nmid m$, (3.4) queda simplemente

$$a_m(T_p(f)) = p^{2k-1} a_{\frac{m}{p}}(f) + a_{mp}(f). \tag{3.5}$$

Proposición 3.5. *Si $(n, m) = 1$ se tiene que $T_n T_m = T_m T_n = T_{nm}$.*

Demostración. Veremos que dados n, m con $(n, m) = 1$, para todo r se tiene que $a_r(T_n T_m(f)) = a_r(T_{nm}(f))$. Esto claramente implica la proposición.

En primer lugar, según se probó, $a_r(T_m(f)) = \sum_{d|(r,m)} a_{rm/d^2}(f)$. Luego

$$\begin{aligned} a_r(T_nT_m(f)) &= \sum_{e|(r,n)} e^{2k-1}a_{rn/e^2}(T_m(f)) \\ &= \sum_{d|(m,rn/e^2)} \sum_{e|(r,n)} d^{2k-1}e^{2k-1}a_{rnm/e^2d^2}(f) \\ &= \sum_{h|(nm,r)} h^{2k-1}a_{rnm/h^2}(f) = a_r(T_{nm}(f)). \end{aligned}$$

Dejamos al lector la verificación de la última igualdad.

En el caso $n = p, m = q$ primos distintos, se tiene

$$\begin{aligned} a_m(T_p(T_qf)) &= a_{mp}(T_q(f)) + p^{2k-1}a_{m/p}(T_q(f)) \\ &= a_{mpq(f)} + q^{2k-1}a_{mp/q}(f) + p^{2k-1}a_{mq/p}(f) + p^{2k-1}q^{2k-1}a_{m/pq}(f)\,. \end{aligned}$$

Notar que, en esta expresión, si p y q no dividen a m queda simplemente $a_m(T_p(T_qf)) = a_m(T_{pq}f) = a_{mpq}(f)$. □

Proposición 3.6. *Si p es primo, entonces*

$$T_pT_{p^s} = T_{p^{s+1}} + p^{k-1}T_{p^{s-1}}. \tag{3.6}$$

En particular, para todo $s \geq 2$, T_{p^s} es combinación lineal entera de composición de operadores ${T_p}^j$ con $0 \leq j \leq s-1$.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{M}_k$. Entonces

$$T_{p^s}f(z) = p^{s(k-1)} \sum_{0\leq i\leq s} p^{-i2k} \sum_{0\leq b<p} f\left(\frac{p^{s-i}z+b}{p^i}\right) \tag{3.7}$$

$$T_pg(z) = p^{(2k-1)}g(pz) + p^{-1} \sum_{0\leq b<p} g\left(\frac{z+b'}{p}\right)$$

Luego

$$\begin{aligned} T_pT_{p^s}f(z) = p^{(s+1)(2k-1)} &\sum_{0\leq i\leq s} p^{-i2k} \sum_{0\leq bp} f\left(\frac{p^{s+1-i}z+b}{p^i}\right) \\ &+ p^{-1}p^{s(2k-1)} \sum_{0\leq b'<p} \sum_{0\leq i\leq s} p^{-i2k} \sum_{0\leq b<p^i} f\left(\frac{p^{s-i}(z+b')+pb}{p^{i+1}}\right)\,. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Si hacemos $i = s$ en el segundo sumando obtenemos

$$p^{-1-s} \sum_{0\leq b'<p} \sum_{0\leq b<p^s} f\left(\frac{z+b'+pb}{p^{s+1}}\right) = p^{-1-s} \sum 0 \leq b < p^{s+1} f\left(\frac{z+b}{p^{s+1}}\right)\,.$$

Si este término se agrega al primero se obtiene (3.7) con $s+1$ en lugar de s, es decir $T_{p^{s+1}}f(z)$. Los términos restantes son

$$p^{-1}p^{s(2k-1)} \sum_{0\leq b'<p} \sum_{0\leq i\leq s-1} p^{-i2k} \sum_{0\leq b<p} f\left(\frac{p^{s-1-i}z+b+p^{s-1}b')}{p^i}\right)\,. \tag{3.9}$$

Ahora bien, para cada i, el conjunto $\{b+p^{s-1-i}b' : 0 \le b < p^i,\ 0 \le b' < p\}$ recorre p^{i+1} números que recorren todas las clases módulo p^i, p veces. Por ejemplo, si $i \le \frac{p-1}{2}$ entonces $b + p^{s-1-i}b' \equiv b \mod p^i$ para todo $0 \le b' < p$.

Como $f(u+1) = f(u)$ se obtiene siempre el mismo valor. Luego (3.9) es igual a

$$p^{s(2k-1)} \sum_{0\le i\le s-1} p^{-i2k} \sum_{0\le b<p} f\left(\tfrac{p^{s-1-i}z+b)}{p^i}\right) = p^{k-1}T_{p^{s-1}}f(z) \tag{3.10}$$

lo cual implica la ecuación (3.6). □

Se define $\mathcal{H}$, el *álgebra de Hecke*, como el álgebra generada por los operadores de Hecke T_n, con $n \in \mathbb{N}_0$. Los dos resultados previos muestran que $\mathcal{H}$ es una Q-álgebra conmutativa, generada por los operadores T_p con p primo. A continuación veremos que los operadores de Hecke son autoadjuntos con respecto a un producto interno canónico en $\mathcal{S}_k$ (ver [Pe39]).

Definición 3.7. Se define el producto interno de Petersson en $L^2(\Gamma\backslash H)$ por

$$\langle f, g\rangle = \int_{\Gamma\backslash H} f(z)\overline{g(z)}\, y^k\, \frac{dxdy}{y^2}. \tag{3.11}$$

En primer lugar observamos que $\frac{dxdy}{y^2} = -\frac{dz\wedge\overline{dz}}{\mathrm{Im}(z)^2}$ es una medida invariante en H pues si $g \in SL_2(\mathbb{R})$,

$$\frac{d(gz)\wedge\overline{d(gz)}}{\mathrm{Im}(gz)^2} = \frac{g'(z)\overline{g'(z)}\ dz\wedge\overline{dz}}{\mathrm{Im}(gz)^2} = \frac{dz\wedge\overline{dz}}{\mathrm{Im}(z)^2}$$

puesto que $\mathrm{Im}(gz) = \mathrm{Im}(z)/|cz+d|^2$ y $g'(z) = (cz+d)^{-2}$.

Notemos que $\langle f, g\rangle$ está definido para $f, g \in \mathcal{S}_{2k}(\Gamma)$ (o incluso entre dos formas modulares de peso $2k$ si una de ellas es cuspidal).

El integrando en (3.11) es una función Γ-invariante, ya que

$$f(\gamma z)\overline{g(\gamma z)}\,\mathrm{Im}(\gamma z)^{2k} = |cz{+}d|^{4k}\,\Im(z)^k/|cz+d|^{4k}\, f(z)\overline{g(z)} = \mathrm{Im}(z)^{2k}f(z)\overline{g(z)}.$$

La convergencia es consecuencia de la siguiente acotación

Lema 3.8. *Si $f \in \mathcal{S}_{2k}(\Gamma)$, f satisface la acotación $|f(z)| \le C|\Im(z)|^{-k}$ para todo $z \in H$. Además*

$$|a_n(f)| \le O(n^k)\,. \tag{3.12}$$

Demostración. La función $|f(z)y^k|$ es Γ-invariante en H. Por ser f cuspidal, existe $M > 0$ tal que $|f(z)y^k| \le M$ para todo $z \in H$. O sea $|f(z)| \le My^{-k}$ para todo $z \in H$. Por lo tanto

$$|a_n(f)| = \left|\int_0^1 f(x+iy)e^{2\pi inz}\,dx\right| \le My^{-k}e^{2\pi ny}$$

para todo $y > 0$. Tomando $y = 1/n$ resulta (3.12). □

Teorema 3.9. *T_n es un operador autoadjunto en $(\mathcal{S}_{2k}(\Gamma), \langle\cdot,\cdot\rangle)$.*

Demostración. Se tiene $T_n f = n^{2k-1}\sum_{i=1}^{r} f|\delta_i$, donde δ_i, $1 \le i \le r$ es un sistema de representantes de $\Gamma\backslash\mathbb{M}_n$ que a la vez son representantes de $\mathbb{M}_n/\Gamma$. Sea $\nu = \begin{bmatrix} \sqrt{n} & 0 \\ 0 & \sqrt{n} \end{bmatrix}$ y sea $\delta_i = \nu\beta_i$ con $\beta_i \in SL_2(\mathbb{R})$. Se verifica que $f|\nu(z) = n^{-k} f(z)$ y $f|\beta(z)\,\overline{g(z)}\,y^k = f(z)\,\overline{g|\beta^{-1}}(z)\,y^k$.

$$\begin{aligned}\langle T_n f, g\rangle &= n^{2k-1}\sum_{i=1}^{r}\langle f|\nu\beta_i, g\rangle = n^{2k-1}\sum_{i=1}^{r}\langle f|\nu, g|\beta_i{}^{-1}\rangle \\ &= n^{2k-1}\sum_{i=1}^{r} n^{-k}\langle f, g|\beta_i{}^{-1}\rangle = n^{2k-1}\sum_{i=1}^{r} n^{-k}\langle f, g|\beta_i{}^{-1}\nu\rangle = \langle f, T_n g\rangle\end{aligned}$$

pues $\beta_i^{-1}\nu$, $1 \le i \le r$ es un sistema de representantes de $\Gamma\backslash\mathbb{M}_n$ por la elección de los δ_i (ejercicio). □

Corolario 3.10. *Para cada $k \ge 1$ existe una base ortonormal de $S_{2k}(\Gamma)$ de autofunciones de todos los operadores de Hecke, $T_n(F) = \lambda(n)f$ con $\lambda(n) \in \mathbb{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Estas autofunciones son denominadas* autoformas de Hecke.

Proposición 3.11. *Sea $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma)$ una autoforma de Hecke con $T_n(f) = \lambda(n)f$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $k > 0$ se tiene que $a_1(f) \neq 0$ y si $k = 0$ y $a_1(f) = 0$ entonces $f = c$ es constante. Si $k > 0$ y $a_1(f) = 1$, entonces*

(i) $a_n(f)a_m(f) = a_{nm}(f)$ *si* $(n, m) = 1$.
(ii) $a_p(f)a_{p^s}(f) = a_{p^{s+1}}(f) + p^{2k-1}a_{p^{s-1}}(f)$.

Demostración. Se tiene que $T_n(f) = \lambda(n)\sum_{m=0}^{\infty} a_m(f)q^m = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(T_n f)q^m$ y $a_1(T_n f) = a_n(f)$ por un resultado anterior.

Esto implica que $a_1(T_n f) = a_n(f) = \lambda(n)a_1(f)$. Entonces, si $a_1(f) = 0$, es $a_n(f) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $f = a_0(f)$ es constante y $k = 0$.

Además, si $k > 0$ es $a_1(f) \neq 0$ y si se supone que f es una forma cuspidal normalizada, $a_1(f) = 1$, luego sigue que $a_n(f) = \lambda(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $T_nT_m = T_{nm}$ si $(n, m) = 1$, es también $\lambda(nm) = \lambda(n)\lambda(m)$ si $(n, m) = 1$ y lo mismo para $a_{nm}(f)$, lo cual implica (i).

Similarmente, como $T_pT_{p^s} = T_{p^{s+1}} + p^{2k-1}T_{p^{s-1}}$ la misma identidad vale para $\lambda_{p^s} = a_{p^s}(f)$, luego se tiene (ii). □

Corolario 3.12. *Dos autoformas cuspidales normalizadas, o bien son ortogonales o son iguales.*

Demostración. Sean f, g, tales que $T_n f = \lambda(n)f$, $T_n g = \mu(n)g$ para todo n, se tiene $\lambda(n)\langle f, g\rangle = \langle T_n(f), g\rangle = \langle f, T_n(g)\rangle = \mu(n)\langle f, g\rangle$. Luego, o bien $\langle f, g\rangle = 0$, o bien $\lambda(n) = \mu(n)$ para todo n, o sea $a_n(f) = a_n(g)$ para todo n, luego $f = g$. □

Los resultados anteriores sobre multiplicatividad de coeficientes de Fourier de las autoformas de Hecke normalizadas se traducen en propiedades de las funciones L asociadas.

Dada f una forma modular de peso $2k$, Hecke definió la función $L_f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)n^{-s}$. Como vimos (ver (3.12)), los coeficientes $a_n(f)$ admiten la cota $a_n(f) = O(n^k)$, luego la serie converge absolutamente y define una función holomorfa en el semiplano Re $s > k+1$.

Una sucesión a_n que satisface $a_{nm} = a_n a_m$ (resp. $a_{nm} = a_n a_m$ si $(n,m) = 1$) se dice *multiplicativa* (resp. *débilmente multiplicativa)*. Dejamos la verificación del siguiente hecho como ejercicio.

Proposición 3.13. *Sea la serie de Dirichlet* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n^{-s}$ *donde* $a_n = O(n^N)$, *con* $N > 0$. *Entonces*

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n^{-s} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{a_p}{p^{-s}}\right)^{-1}$ *sii* a_n *es multiplicativa.*

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n^{-s} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(\sum_{j\geq 0} a_{p^j} p^{-js}\right)$ *sii* a_n *es débilmente multiplicativa.*

(iii) *Si* a_n *es débilmente multiplicativa, entonces se tiene además*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n^{-s} = \prod_{p\, primo} \left(1 - a_p p^{-s} + p^{2k-1} p^{-2s}\right)^{-1}$$

sii se satisface

$$a_p a_{p^n} = a_{p^{n+1}} + p^{2k-1} a_{p^{n-1}}$$

para todo p *primo.*

Como consecuencia de las proposiciones anteriores se obtiene la siguiente caracterización debida a Hecke.

Teorema 3.14. *Si* $f \in \mathcal{S}_{2k}$ *es una forma cuspidal normalizada, entonces son equivalentes*

(i) f *es una autoforma de Hecke* .

(ii) $L_f(s) = \prod_{p\, primo} \left(1 - a_p p^{-s} + p^{2k-1} p^{-2s}\right)^{-1}$.

(iii) *La sucesión de coeficientes de Fourier de* f *es débilmente multiplicativa y satisface* $a_p(f) a_{p^n}(f) = a_{p^{n+1}}(f) + p^{2k-1} a_{p^{n-1}}(f)$ *para cada* p *primo* .

(iv) *la sucesión* $a_n(f)$ *satisface para todo* m, n

$$a_n(f) a_m(f) = \sum_{d|(n,m)} d^{2k-1} a_{\frac{nm}{d^2}}.$$

Demostración. Si $T_n(f) = \lambda(n) f$ para todo n, entonces $a_n(f) = \lambda(n)$ para cada n y se satisfacen (ii) y (iii). Además es fácil ver que para formas normalizadas (iii) equivale a (ii).

Para probar que (iii) implica (i) veamos primero que f es autofunción de T_p para todo p primo. Es decir que

$$\sum_{m\geq 0} a_m(T_p f) q^m = \lambda(p) \sum_{m\geq 0} a_m(f) q^m,$$

o sea $a_m(T_p f) = \lambda(p) a_m(f)$ para todo m (con $\lambda(p)$ a determinar).

Si $m=1$, esto dice que $a_p(f)=\lambda(p)a_1(f)=\lambda(p)$.

Ahora bien, si $p\nmid m$ $a_m(T_pf)=a_{pm}(f)=a_p(f)a_m(f)$ por (iii).

Si $p\nmid m$, $m=p^sm'$ con $(p,m')=1$ se tiene que

$$\begin{aligned} a_m(T_pf) &= a_{mp}(f)+p^{2k-1}a_{m/p}(f)=a_{p^{s+1}m'}(f)+p^{2k-1}a_{p^{s-1}m'}(f)\\ &=(a_{p^{s+1}}(f)+p^{2k-1}a_{p^{s-1}}(f))a_{m'}(f)\\ &=a_p(f)a_{p^s}(f)a_{m'}(f)=a_p(f)a_m(f). \end{aligned}$$

Luego $T_p(f)=a_p(f)f$ para todo p primo. Afirmamos que de esto se deduce que $T_n(f)=a_n(f)f$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

En efecto, si $n=\prod p_j^{i_j}$, es $T_n(f)=T_{p_1{}^{i_1}}\dots T_{p_r{}^{i_r}}(f)$, luego, bastaría ver que si p es primo es $T_{p^n}(f)=a_{p^n}(f)$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Para esto procedemos inductivamente, usando (iii)

$$T_{p^{n+1}}(f)=T_pT_{p^n}(f)-p^{2k-1}T_{p^{n-1}}(f) \tag{3.13}$$

$$=a_p(f)a_{p^n}(f)-p^{2k-1}a_{p^{n-1}}(f)=a_{p^{n+1}}(f). \tag{3.14}$$

Finalmente, es claro que (iv) implica (iii). Dejamos la prueba de que (iii) implica (iv) como ejercicio para el lector. □

Ejemplo 3.15. Observamos que si $\dim\mathcal{S}_{2k}=1$, cualquier $f\in\mathcal{S}_{2k}$ es una autoforma. Este es el caso para todo k tal que $6\le k<12$; por ejemplo, $\Delta(z)\in\mathcal{S}_{12}$ es autofunción de T_n para todo n.

Se tiene que

$$\Delta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n,\quad \tau(1)=1.$$

La función $\tau(n)$ fue estudiada por Ramanujan quien conjeturó que

$$\tau(nm)=\tau(n)\tau(m) \text{ si } (n,m)=1 \tag{3.15}$$

$$\tau(p)\tau(p^n)=\tau(p^{n+1})+p^{11}\tau(p^{n-1}), \tag{3.16}$$

probado por Mordell en 1920.

Además Ramanujan conjeturó que $|\tau(p)|\le 2p^{11/2}$ y más generalmente que $\tau(n)=O_\varepsilon(n^{(11/2)+\varepsilon})$ para todo $\varepsilon>0$. Estos hechos fueron probados por Deligne como consecuencia de las conjeturas de Weil (1969 y 1973). Deligne probó que para $f\in\mathcal{S}_k$ normalizada se tiene

$$|a_p(f)|\le 2p^{k-1/2},\quad |a_n(f)|\le\sigma_0(n)n^{k-1/2}. \tag{3.17}$$

Como ya se vio, la acotación $a_n(f)=O(n^k)$ no es difícil de probar, sin embargo (3.17) sí es muy difícil.

Notamos que por los hechos anteriores se tiene

$$L_\Delta(s)=\sum_{n\ge1}\tau(n)n^{-s}=\prod_p\left(1-\tau(p)p^{-s}+p^{11}p^{-2s}\right)^{-1}.$$

Sea f una autoforma normalizada para un subgrupo de congruencia. Factorizando $1-a_p(f)x+p^{2k-1}x^2 = (1-\alpha_p x)(1-\alpha'_p x)$, se tiene $\alpha_p+\alpha'_p = a_p(f)$ y $\alpha_p\alpha'_p = p^{2k-1}$.

La llamada conjetura de Ramanujan-Petersson afirma que para todo p se cumple que $\alpha'_p = \overline{\alpha_p}$, o sea $|\alpha_p| = |\alpha'_p| = p^{(2k-1)/2}$.

Ejemplo 3.16. A continuación probaremos que las series de Eisenstein $G_{2k}(z)$ son también autofunciones de todos los operadores de Hecke. La autofunción normalizada y la función L asociada son respectivamente

$$G'_{2k}(z) = \frac{(-1)^k B_k}{4k} + \sum_{1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(m)q^m,$$

$$L_{G'_{2k}}(s) = \prod_p \left(1 - (1+p^{2k-1})p^{-s} + p^{2k-1}p^{-2s}\right)^{-1}.$$

Veremos que en este caso es $\lambda(n) = \sigma_{2k-1}(n)$ para todo n y $\lambda(p) = 1+p^{2k-1}$.

En primer lugar

$$a_0(T_n(G'_{2k})) = (\sum_{d|n} d^{2k-1})a_0(f) = \sigma_{2k-1}(n)a_0(f).$$

Resta verificar que $\lambda(p) = 1 + p^{2k-1}$ o equivalentemente que

$$a_p(T_m(G'_{2k})) = \sigma_{2k-1}(p)\sigma_{2k-1}(m) \quad \forall\, p, m.$$

Supondremos primero que $p \nmid m$. Entonces

$$\begin{aligned} a_p(T_m(G'_{2k}) = \sigma_{2k-1}(pm) &= \sum_{d|pm} d^{2k-1} = \sum_{d|m} d^{2k-1} + \sum_{d|m} p^{2k-1}d^{2k-1} \\ &= (1+p^{2k-1})\sigma_{2k-1}(m) = \sigma_{2k-1}(p)\sigma_{2k-1}(m). \end{aligned}$$

Dejamos la verificación del caso $p \mid m$ como ejercicio.

Los ejemplos anteriores y la descripción del álgebra $\mathcal{M}$ en el caso de $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$, que es generada como álgebra por las series de Eisenstein, dice en particular que para cada k, $\mathcal{M}_{2k}$ posee una base de formas modulares cuyos coeficientes de Fourier son números enteros. Las autoformas de Hecke son formas distinguidas en cada dimensión, por ejemplo $\Delta^2(z)$ es una forma modular de peso 24 que no es una autoforma de Hecke. Se tiene el siguiente hecho.

Proposición 3.17. *Si $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$, los coeficientes de Fourier de una autoforma de Hecke normalizada son enteros algebraicos totalmente reales.*

Demostración. Sea $f \in S_{2k}(\Gamma)$. Como ya se observó, $\mathcal{M}_{2k}$ admite una base de formas con coeficientes de Fourier en $\mathbb{Z}$ (pues $\Delta(z)$ y las series de Eisenstein $G_m(z)$ tienen esta propiedad). Claramente, T_n preserva el retículo $\mathcal{L}$ de formas con coeficientes enteros y en una $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{L}$ está representado por una matriz a coeficientes enteros. Sus autovalores $\lambda(n)$ son números reales que son raíces del polinomio característico de esta matriz, que es mónico con coeficientes enteros, luego cada $\lambda(n)$ es un entero algebraico totalmente real. $\square$

3.1. Subgrupos de nivel N. La teoría de formas modulares se simplifica en el caso en que $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$. Para subgrupos de congruencia es bastante más complicada y hay aun importantes preguntas sin respuesta. En esta subsección describiremos los cambios necesarios en la teoría en el caso de los subgrupos de congruencia de Hecke $\Gamma_0(N)$, enunciando resultados debidos a Atkin-Lehner ([AL70]).

En primer lugar se define el operador T_n para $f \in S_k(\Gamma_0(N))$ por

$$T_n(f)(z) = n^{k-1} \sum_{ad=n} \sum_{0 \leq b < d} d^{k-1} f(\frac{az+b}{d}).$$

Interesan especialmente los T_n con $(n, N) = 1$. Bajo esta hipótesis, la Proposición 3.2 es válida con igual prueba, lo que implica que $T_n(f)$ es holomorfa (y cuspidal si f lo es) en i_∞. Se sigue que T_n preserva $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N))$ y $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))$, previa justificación del comportamiento de $T_n(f)$ en las cúspides de Γ distintas de i_∞. Similarmente, para todo n, m con $(nm, N) = 1$, con igual prueba que para $N = 1$ se obtiene que $T_n T_m = T_m T_n = T_{nm}$, así como la expresión (3.6) para todo primo $p \nmid N$. En consecuencia, los operadores T_n con $(n, N) = 1$ generan un álgebra conmutativa $\mathcal{H}_N$.

El producto de Petersson se define igualmente por (3.11) para f, g en $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))$ (basta que una de ellas, f o g sea cuspidal) y los operadores T_n con $(n, N) = 1$ son autoadjuntos, luego existe una base ortonormal de $S_k(\Gamma_0(N))$ de autofunciones de todos los operadores T_n con $(n, N) = 1$.

Los operadores de Hecke en el caso en que $p \nmid N$ tienen distintas propiedades que los T_p en que $p \mid N$. Estos p suelen llamarse los primos ramificados. Para estos primos T_p no es autoadjunto (ver [Sh71]).

Para una autoforma f autofunción de T_n para todo $(n, N) = 1$ se tiene como anteriormente, que $\lambda(n) a_1(f) = a_n(f)$ y f puede ser normalizada dividiendo por $a_1(f)$. Sin embargo, no se puede concluir en este caso que si $a_1(f) = 0$ entonces $f = 0$, ya que esto implica $a_n(f) = 0$ sólo para los n tal que $(n, N) = 1$.

La situación fue clarificada por Atkin-Lehner ([AL70]). Sea, para $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))$, la forma $f|d(z) = f(dz)$. Es fácil ver que $f|d \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(dN))$ y si $(n, Nd) = 1$, como T_n conmuta con el operador $f \to f|d$, se sigue que $f|d$ es una autoforma de Hecke de nivel Nd. Ahora bien, como $f|d(z) = \sum_{m \geq 1} a_m(f) e^{2\pi i d m z}$ el coeficiente $a_1(f|d) = 0$ si $d > 1$.

La construcción anterior dice que es conveniente distinguir el espacio de las autoformas que provienen de un nivel inferior (*old forms* o formas viejas) de las que no (*new forms* o *formas nuevas*). Esto es, sea $S_k(\Gamma_0(N))_{old}$ el subespacio de $S_k(\Gamma_0(N))$ generado por las formas $f|d$ donde $d|N$:

$$\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))_o = \oplus_{n|N} \oplus_{d|\frac{N}{d}} S_k(\Gamma_0(N))|d$$

y sea $S_k(\Gamma_0(N))_n = S_k(\Gamma_0(N))_o{}^{\perp}$, el espacio de formas nuevas. Claramente, si $(n, N) = 1$, T_n preserva $S_k(\Gamma_0(N))_o$ y por ser autoadjunto, también preserva $S_k(\Gamma_0(N))_n$. Podemos ahora hacer una síntesis de algunos de los resultados principales en [AL70].

Teorema 3.18. *Si $f, g \in S_k(\Gamma_0(N))_{new}$ son autofunciones de T_n con autovalor $\lambda(n)$ para todo $(n, N) = 1$ entonces $f = cg$ $c \in \mathbb{C}$.*

El teorema dice en particular que si $f \in S_k(\Gamma_0(N))_n$ es autofunción de los T_n para todo $(n, N) = 1$, también es autofunción de los restantes operadores T_n pues el álgebra de Hecke es conmutativa. Por lo tanto, en el espacio de autoformas nuevas se recuperan resultados válidos en el caso $N = 1$.

Corolario 3.19. *Sea $f \in S_k(\Gamma_0(N))_n$ autofunción de T_n para todo $(n, N) = 1$. Entonces f es una autoforma, vale $a_n(f) = \lambda(n)a_1(f)$ para todo n y si $f \neq 0$ entonces $a_1(f) \neq 0$.*

Además, dos autoformas nuevas normalizadas son perpendiculares o son iguales y el espacio $S_k(\Gamma_0(N))_n$ tiene una base de autoformas de Hecke normalizadas que es única, salvo permutaciones.

Referencias

[AL70] Atkin, Lehner, J., Hecke Operators on $\Gamma_0(m)$. *Math. Annalen*, **185** (1970), 134-160.

[Ca73] Casselman, W., On some results of Atkin and Lehner, *Math. Annalen*, **201** (1973), 301-314.

[DS05] Diamond, F.; Shurman, J., A first course in modular forms, *Springer Verlag, Grad. Text Math.* **223**, (2005)

[He37] Hecke, E., Über Modulnfunktionen und die Dirichletscher Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung I,II, *Math. Annalen*, **114** (1937), 1-28, 316-351.

[I97] Iwaniec H., Topics in classical automorphic forms, *American Math. Society*, Grad. Stud. Math. **17** (1997).

[IK04] Iwaniec, H. ; Kowalski, E., Analytic Number Theory, *American Math. Society*, Colloquium Publications **53** (2004).

[KW09] Kohnen, W.; Weiss, Ch. Orthogonality and Hecke operators, *Proc. Indian Math. Soc.* **119** (2009), 283-286.

[Mi71] Miyake, T. On automorphic forms on GL_2 and Hecke operators, *Annals of Math.* **94** (1971), 174-189.

[Mi89] Miyake, T. Modular Forms, *Grad. Text. Math.* **7**, Springer-Verlag (1989).

[Pe39] Petersson, H., Konstruktion der sämtlichen Lösungen einer Riemannschen Funktionalgleichung durch Dirichlet-Reihen mit Eulerscher Produktenwicklung I,II,III, *Math. Annalen*, **116** (1939) 401-412, **117** (1940) 39-64, 277-300.

[Se73] Serre, J-P. A course in arithmetic, *Grad. Text. Math.* **7** Springer-Verlag, (1973).

[Sh71] Shimura, G. Introduction to the arithmetic theory of automorphic forms *Princeton University Press* **4** (1970).

[We67] Weil, A. Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen, *Math. Annalen* **168** (1967), 149-156.

CIEM–FaMAF, Universidad Nacional de Córdoba, 5000-Córdoba, Argentina.

E-mail address: `miatello@famaf.unc.edu.ar`