LEMAS DE ELIMINACIÓN Y APLICACIONES

JUANJO RUÉ

1. Introducción

En esta última sección del curso de combinatoria aditiva vamos a mostrar aplicaciones de la teoría de grafos en el contexto de la teoría de números. Para ello, empezaremos hablando de una técnica fundamental en matemática discreta denominada *Lema de regularidad de Szemerédi*. Dicho resultado dice (de manera informal) que todo grafo denso suficientemente grande puede descomponerse en subgrafos que tienen un comportamiento muy parecido a los grafos bipartitos aleatorios. En particular mostraremos como aplicar esta técnica en el denominado *lema de eliminación de triángulos*, y como consecuencia hallaremos una prueba del teorema de Roth puramente combinatoria, así como extensiones de ésta.

Notación: si no se dice lo contrario, todos los grafos que se considerarán serán simples. Usando la notación habitual, para un grafo $G = (V, E)$, V denotará el conjunto de vértices y E el correspondiente conjunto de aristas. Dado un vértice $x \in V$, el conjunto de vecinos de x (que denotaremos por $N(x)$) es el conjunto de vértices incidentes con x. El grado de x (que denotaremos por $d(x)$) es el cardinal de $N(x)$. Finalmente, denotaremos el conjunto de enteros $\{1, \ldots, n\}$ por $[n]$.

2. El lema de regularidad de Szemerédi.

En el curso de su demostración de que existen progresiones aritméticas en conjuntos de densidad positiva, Szemerédi introdujo un método en teoría de grafos que ha resultado ser fundamental en combinatoria, y especialmente útil en el estudio de problemas de tipo extremal. Es el que se denomina *Lema de Regularidad de Szemerédi.* A *grosso modo* dicho resultado dice lo siguiente: fijada una tolerancia $\varepsilon > 0$, existe siempre un valor $N_0 := N_0(\varepsilon)$ tal que todo grafo con un número de vértices $n > N_0(\varepsilon)$ admite una partición de sus vértices tal que:

1. El número de bloques de la partición únicamente depende de ε, y no de n.
2. La estructura de las aristas entre dos de estos bloques puede modelarse como en un grafo aleatorio bipartito.

Formalicemos estas ideas. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Sean X e Y subconjuntos disjuntos de V. Denotemos por $e(X, Y)$ el número de aristas entre X e Y, y

$$d(X, Y) = \frac{e(X, Y)}{|X||Y|},$$

la correspondiente densidad de aristas definida por el par de conjuntos de vértices. La definición fundamental es ahora la siguiente:

Definición 2.1 (Par ε-regular). *Sea $G = (V, E)$ un grafo y $\{X, Y\}$ una pareja de subconjuntos disjuntos de V. Sea $\varepsilon > 0$. Decimos que el par $\{X, Y\}$ es ε-regular si para todo $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, $|A| \geq \varepsilon|X|$ y $|B| \geq \varepsilon|Y|$ se cumple que*

$$|d(X, Y) - d(A, B)| \leq \varepsilon. \tag{1}$$

Esta definición nos dice que la densidad de aristas es en cierto modo "uniforme" bajo la elección de subconjuntos suficientemente grandes. Esta propiedad es una versión más débil de lo que ocurre en el siguiente modelo aleatorio: tomemos dos conjuntos disjuntos de vértices V_1 y V_2. Construyamos un grafo bipartito incluyendo cada una de las posibles $|V_1||V_2|$ aristas independientemente con probabilidad p. Si denotamos por $d(V_1, V_2)$ la variable aleatoria que mide la densidad de aristas, entonces su esperanza es igual a $\mathbb{E}[d(V_1, V_2)] = p$. Si realizamos el mismo cálculo para subconjuntos $W_1 \subseteq V_1$ y $W_2 \subseteq V_2$ obtenemos que $\mathbb{E}[d(W_1, W_2)] = p$, y por lo tanto $\mathbb{E}[d(W_1, W_2) - d(V_1, V_2)] = 0$.

El siguiente paso es ahora descomponer un grafo dado en término de pares ε-regulares. Este hecho viene descrito en la siguiente definición:

Definición 2.2 (Partición ε-regular). *Sea $G = (V, E)$ un grafo y $\varepsilon > 0$ un valor dado. Sea $V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cdots \cup V_k$ una partición de V. Decimos que esta partición es ε-regular si:*

(a) $|V_0| \leq \varepsilon|V|$,
(b) $|V_1| = \cdots = |V_k|$,
(c) *Todos excepto εk^2 de los pares $\{V_i, V_j\}$ son ε-regulares.*

La existencia de una tal partición no es del todo clara. Afortunadamente lo que ocurre es que para grafos suficientemente grandes siempre existen dichas particiones. Este es el resultado que se conoce como el *Lema de Regularidad de Szemerédi:*

Teorema 2.3 (Lema de regularidad de Szeméredi). *Sea $\varepsilon > 0$ y $m > 0$. Existe entonces un entero $M := M(\varepsilon, m)$ tal que todo grafo con más de m vértices admite una partición ε-regular $\{V_0, \ldots, V_k\}$ con $m \leq k \leq M$.*

Notar que en este resultado el número de bloques depende *únicamente* de ε y del parámetro m, pero no del tamaño del grafo (n). La idea de prueba del teorema (ver por ejemplo [2]) es la siguiente: empecemos con una partición arbitraria de $V = V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cdots \cup V_r$ del mismo tamaño, y procedamos algorítmicamente a refinar dicha partición (es decir, subdividir cada uno de los V_i en conjuntos disjuntos). Entonces, se puede definir una *función de energía* sobre dicha partición que se incrementa un valor constante en cada refinamiento realizado. Después de un número finito de iteraciones de refinamiento, necesariamente la partición debe ser ε-regular, ya que de otro modo se llegaría a una contradicción al mirar la energía final obtenida.

Actualmente este lema es una de las piedras angulares de la teoría extremal de grafos. Desafortunadamente la dependencia de de los parámetros en el teorema es muy mala: el algoritmo que se he utiliza para refinar la partición utiliza $\frac{1}{\varepsilon^4}$ iteraciones para llegar a una partición ε-regular.

3. Una aplicación: contando triángulos

Veamos una aplicación de este resultado que será muy útil en la teoría de los números. El Lema de regularidad de Szemerédi nos permite contar triángulos en grafos de manera sencilla:

Teorema 3.1 (Lema contador de triángulos)**.** *Sea $G = (V, E)$ un grafo y $X \cup Y \cup Z$ una partición V. Supóngase que $d(X, Y) = \alpha$, $d(X, Z) = \beta$ y $d(Y, Z) = \gamma$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que* $\min\{\alpha, \beta, \gamma\} \geq 2\varepsilon$. *Asumamos también que los pares $\{X, Y\}$, $\{Y, Z\}$ y $\{X, Z\}$ son ε-regulares.*

Entonces, el número de triángulos $\triangle xyz$, con $x \in X$, $y \in Y$ y $z \in Z$ es mayor o igual que

$$(1 - 2\varepsilon)(\alpha - \varepsilon)(\beta - \varepsilon)(\gamma - \varepsilon)|X||Y||Z|.$$

Demostración. Para un vértice $v \in V$ denotemos por $d_X(v)$ $d_Y(v)$ y $d_Z(v)$ el número de vecinos de v en X, Y y Z, respectivamente.

Empecemos la prueba demostrando que controlamos el número de vértices en X con grado *pequeño*: debemos demostrar este hecho para poder aplicar más tarde la condición de ε-regularidad. Veamos lo siguiente:

$$|\{x \in X : d_Y(x) < (\alpha - \varepsilon)|Y|\}| < \varepsilon|X|.$$

Supongamos lo contrario: $|\{x \in X : d_Y(x) < (\alpha - \varepsilon)|Y|\}| \geq \varepsilon|X|$. Para simplificar la notación, escribamos $\{x \in X : d_Y(x) < (\alpha - \varepsilon)|Y|\} = X'$. Entonces, $|X'| \geq \varepsilon|X|$. Usando la definición de pareja ε-regular, $|d(X', Y) - d(X, Y)| < \varepsilon$. Como $d(X, Y) = \alpha$ y $d(X', Y) < \alpha - \varepsilon$ (observar que cada vértice x en X' contribuye en como mucho $(\alpha - \varepsilon)|Y|$ aristas) tenemos que

$$d(X', Y) - d(X, Y) < \alpha - \varepsilon - \alpha < -\varepsilon,$$

pero esto contradice el hecho que $|d(X', Y) - d(X, Y)| < \varepsilon$. Permutando letras, el mismo argumento es válido cuando estudiamos vértices de grado pequeño en Y y en Z. Esto nos lleva a concluir que

$$|\{x \in X : d_Y(x) \geq (\alpha - \varepsilon)|Y| \text{ y } d_Z(x) \geq (\alpha - \varepsilon)|Z|\}| \geq (1 - 2\varepsilon)|X|.$$

Tomemos ahora $x \in X$ y estudiemos en cuantos triángulos está involucrado. En particular, $|N(x) \cap Y| = d_Y(x) \geq (\alpha - \varepsilon)|Y| \geq \varepsilon|Y|$ y $|N(x) \cap Z| = d_Z(x) \geq (\gamma - \varepsilon)|Z| \geq \varepsilon|Z|$ (recordar que teníamos que $\min\{\alpha, \beta, \gamma\} \geq 2\varepsilon$). Ahora utilizando la condición de ε-regularidad,

$$|d(Y, Z) - d(N(x) \cap Y, N(x) \cap Z)| < \varepsilon \Rightarrow \gamma - \frac{e(N(x) \cap Y, N(x) \cap Z)}{|N(x) \cap Y||N(x) \cap Z|} < \varepsilon.$$

Concluímos entonces que $e(N(x) \cap Y, N(x) \cap Z) > (\alpha - \varepsilon)(\gamma - \varepsilon)|Y||Z|$. Cada arista en este conjunto define un triángulo usando el vértice x, por lo tanto el número de triángulos es mayor o igual que el número de triángulos donde el vértice x satisface la anterior propiedad. Dicho valor es $(1 - 2\varepsilon)|X|e(N(x) \cap Y, N(x) \cap Z)$, como queríamos demostrar. □

Con este lema preliminar ya podemos pasar a demostrar la primera aplicación importante de regularidad, el denominado Lema de eliminación de triángulos:

Teorema 3.2 (Lema de eliminación de triángulos)**.** *Por cada $\varepsilon > 0$ existe un valor $\delta := \delta(\varepsilon) > 0$ (tal que $\delta \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$) y un $n_0 := n_0(\varepsilon)$ tal que para cada grafo G con $n \geq n_0$ vértics y como mucho δn^3 triángulos, se puede hacer libre de triángulos eliminando como mucho εn^2 aristas.*

Antes de demostrar el teorema, veamos que dice: tomemos un grafo G con n vértices (n suficientemente grande). Si éste tiene $o(n^2)$ aristas, el lema es trivial: podemos eliminar todos los triángulos eliminando todas las aristas. El resultado es altamente no trivial cuando el grafo es denso: en este caso, el lema nos dice que se pueden eliminar todos los triángulos eliminando únicamente una pequeña proporción del total de las aristas.

Veamos su prueba usando el Lema de regularidad de Szemerédi:

Demostración. Veamos la implicación opuesta: si necesitamos elminar como mínimo εn^2 aristas para hacer que el grafo resultante sea libre de triángulos, entonces empezamos con un grafo con más de δn^3 triángulos.

Tomemos $\varepsilon > 0$, y elijamos $m = \lfloor \frac{4}{\varepsilon} \rfloor$. Ahora, consideremos una partición $\frac{\varepsilon}{4}$-regular de G con partición $V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_k$. Dicha partición existe por el Lema de regularidad de Szemerédi. Escribamos $c = |V_1| = \cdots = |V_k|$. Observar que $\lfloor \frac{4}{\varepsilon} \rfloor < k$, y que $kc < n$ (en la útlima desigualdad no estamos añadiendo la contribución del número de vértices en V_0, que satisface que $|V_0| \leq \frac{\varepsilon}{4} n$).

Empecemos eliminando algunas pocas aristas de G para los siguientes conjuntos de vértices:

1. Todas las aristas que son incidentes con V_0 (en V_0 o exteriores): tenemos como mucho $|V_0|n = \frac{\varepsilon}{4} n^2$ aristas de este tipo.
2. Todas las aristas interiores en $V_1, \ldots, V_k$: tenemos como mucho $k\binom{c}{2} < kc^2 < \frac{n^2}{k} < \frac{\varepsilon}{4} n^2$ aristas de este tipo.
3. Todas las aristas definidas por pares que no son $\frac{\varepsilon}{4}$-regulares: recordar que hay como mucho $\frac{\varepsilon}{4} k^2$ de estas parejas, con lo que resulta que el número total de aristas en esta situación es menor que $\frac{\varepsilon}{4} k^2 c^2 < \frac{\varepsilon}{4} n^2$.
4. Todas las aristas entre pares $\{V_i, V_j\}$ $\frac{\varepsilon}{4}$-regulares, con $d = d(V_i, V_j) < \frac{\varepsilon}{2}$. En este caso se tiene como mucho $\binom{k}{2}$ de estas parejas (cota trivial), y el número de aristas está acotado entonces por $\binom{k}{2} d(V_i, V_j)|V_i||V_j| < \frac{k^2}{2}\frac{\varepsilon}{2} c^2 < \frac{\varepsilon}{4} n^2$.

Resumiendo, añadiendo las contribuciones anteriores, hemos eliminado como mucho εn^2 aristas en total. Si en este momento el grafo resultante es libre de triángulos, entonces hemos acabado. De no ser así, el grafo todavía contiene triángulos, y necesitamos eliminar más aristas con el fin de obtener un grafo sin triángulos. Observar que las aristas que han sobrevivido están definidas entre pares $\frac{\varepsilon}{4}$-regulares cuya densidad es mayor que $\frac{\varepsilon}{2}$. Basta tomar entonces 3 de estos conjuntos (a los que llamamos V_i, V_j y V_k) y observar que las condiciones necesarias en el Lema contador de triángulos se satisfacen (tomando $\varepsilon/4$ en lugar de ε). Dicho de otro modo:

- $d(V_i, V_j) = \alpha$, $d(V_j, V_k) = \beta$ $d(V_i, V_k) = \gamma$, y $\min\{\alpha, \beta, \gamma\} \geq \frac{\varepsilon}{2}$
- Cada par es $\frac{\varepsilon}{4}$-regular (por hipótesis).

Es por ello que por el Lema contador de triángulos, estos tres conjuntos definen como mínimo

$$(1-\frac{\varepsilon}{2})\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^4 c^3$$

triángulos. Esta cota puede escribirse en términos de n: como $n = |V_0| + kn$, $|V_0| \leq \frac{\varepsilon}{4}n$ y $k \leq M(m, \frac{\varepsilon}{4}) := M(\varepsilon)$ tenemos que

$$n = |V_0| + ck \Rightarrow c > \frac{1}{k}\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)n > \frac{1}{M(\varepsilon)}\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)n,$$

y por lo tanto, el número de triángulos (definidos por esta tripleta, y por lo tanto, en el grafo total) es como mínimo

$$(1-\frac{\varepsilon}{2})\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^4 \frac{1}{M(\varepsilon)^3}\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)^3 n^3.$$

Eligiendo ahora $\delta = (1-\frac{\varepsilon}{2})\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^4 \frac{1}{M(\varepsilon)^3}\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)^3$ tenemos demostrado el resultado: si no hubieramos eliminado todos los triángulos al eliminar εn^2 aristas, entonces el grafo hubiera tenido más de δn^3 triángulo desde un buen principio). En particular, $\delta \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$. □

4. Una prueba del teorema de Roth.

Veamos finalmente una aplicación de toda esta tecnología en el contexto de la teoría de números. Dicha prueba es debida a Szemerédi and Ruzsa con el propósito de demostrar el ya clásico teorema de Roth.

Teorema 4.1 (Teorema de Roth)**.** *Sea $A \subseteq [n]$ sin progresiones aritméticas de longitud 3. Entonces $|A| = O\left(\frac{n}{\log\log(n)}\right)$.*

Este resultado fue demostrado por primera vez por Klaus Roth en el año 1954 mediante el uso de técnicas de análisis de Fourier que se han desarrollado en este curso. Actualmente, la mejor cota superior para el tamaño de un conjunto de enteros libre de progresiones aritméticas de longitud tres es debida a Bloom [1], quién demuestra que si $A \subseteq [n]$ no contiene progresiones aritméticas de longitud 3 entonces

$$|A| = O\left(\frac{n(\log\log(n))^4}{\log(n)}\right)$$

Nuestro objetivo es más modesto, y consiste en demostrar una versión un poco más débil de este resultado ($o(n)$ en lugar de $O(\frac{n}{\log(\log(n))})$, pero que puede demostrarse únicamente con técnicas procedentes de la teoría de grafos.

Teorema 4.2 (Teorema de Roth, v2)**.** *Sea $A \subseteq [n]$. Si A no contiene una progresión aritmética de longitud 3, entonces $|A| = o(n)$.*

Demostración. Mostremos que para todo $\varepsilon > 0$ y $S \subseteq [n]$ cumpliendo que $|S| > \varepsilon n$ (donde n es suficientemente grande, se determinará más tarde), entonces S debe contener una 3-AP. Con esta idea en mente, vamos a construir un grafo adecuado y aplicar el lema de eliminación de triángulos. Para un conjunto $S \subseteq [n]$, definimos el grafo $H(S) = (V, E)$ cuyo conjunto de vértices es igual a $\{(i,1) : i \in [n]\} \cup \{(j,2) : j \in [2n]\} \cup \{(k,3) : k \in [3n]\}$ (por lo tanto, $|V| = 6n$) y su conjunto de aristas E viene definido por:

- $(i,1)$ y $(j,2)$ son adjacentes si y solo si $j - i \in S$.
- $(j,2)$ y $(k,3)$ son adjacentes si y solo si $k - j \in S$.
- $(i,1)$ y $(k,3)$ son adjacentes si y solo si $k - i \in 2 \cdot S = \{2s : s \in S\}$.

Observar ahora que si $(i,1), (j,2)$ y $(k,3)$ definen un triángulo en $H(S)$, escribiendo $j - i = a_1$, $k - j = a_2$ y $k - i = 2a_3$ ($a_i \in S$), entonces $\{a_1, a_2, a_3\}$ define una 3-AP (de hecho x, y, z define una 3-AP si y solo si $x + y = 2z$, que en este caso se satisface: $a_1 + a_2 = (j - i) + (k - j) = k - i = 2a_3$). Adicionalmente, la ternas $(i,1)$, $(i + s, 2)$, $(i + 2s, 3)$ con $s \in S$ son triángulos asociados a las 3-AP's triviales (diferencia 0) s, $s + 0$, $s + 2 \cdot 0$. De este tipo de triángulos hay entonces $|S| \cdot n$. Obviamente esos triángulos son disjuntos, es por ello que debemos eliminar como mínimo $|S|n$ aristas para hacer que el grafo resultante sea libre de triángulos.

Supongamos ahora que $|S| > \varepsilon n$ (y que, obviamente $|S| \leq n$). Entonces, el número de aristas necesarias para eliminar todos los triángulos es como mínimo $\varepsilon n^2 = \frac{\varepsilon}{36}(6n)^2 = \frac{\varepsilon}{36}|V|^2$ (necesitamos estas aristas como mínimo para eliminar los triángulos triviales). Invocando ahora el lema de eliminación de triángulos, existe un $\delta := \delta(\frac{\varepsilon}{36})$ tal que el grafo $H(S)$ tiene como mínimo $\delta |V|^3 = \delta 6^3 n^3$ triángulos.

Por lo tanto, el número de triángulos no triviales es como mínimo $\delta 6^3 n^3 - n^2$. De este modo, tomando n tal que

$$0 < \delta 6^3 n^3 - n^2 \Rightarrow n > \frac{1}{6^3 \delta},$$

aseguramos la existencia de algún triángulo no trivial, y por lo tanto S debe contener alguna 3-AP. $\square$

Volviendo a la prueba, la propiedad de supersaturación nos da de hecho algo más fuerte que lo que hemos afirmado: una observación importante es que siempre que se cumpla la condición dada para n, el número de triángulos no triviales es cúbico en n.

Actualmente existe una gran variedad de resultados inspirados en esta técnica. Green [3], utilizando técnicas del análisis de Fourier, demostró que para grupos abelianos existen lemas de eliminación en el siguiente sentido:

Teorema 4.3 ([3]). *Sea G un grupo abeliano finito de tamaño N, y sea A un subconjunto de G. Entonces, si el número de soluciones de la ecuación $x_1 + \cdots + x_r = 0$, $x_i \in A$ es $o(N^{r-1})$, entonces se pueden eliminar $o(N)$ elementos de A (obteniendo A') tal que la ecuación $x_1 + \cdots + x_r = 0$ es libre de soluciones en A'.*

Las técnicas desarrolladas por Green se basan en técnicas analíticas, que dejan de ser eficaces en el estudio de ecuaciones en grupos no abelianos. Posteriormente, por medio de argumentos combinatorios, Král, Serra y Vena consiguieron estudiar el mismo problema en grupos no abelianos, ver [4]. Estas ideas se han aplicado posteriormente con gran eficacia en contextos más generales, como sistemas de ecuaciones sobre grupos y cuerpos finitos (ver [6, 5, 7]).

5. Ejercicios

1. **Problema 1:** Demostrar que una partición ε-regular de un grafo $G = (V, E)$ define también una partición ε-regular del grafo complementario (es decir, del grafo obtenido tomando el mismo conjunto de vértices V pero tomando todas las aristas *no* contenidas en E).
2. **Problema 2:** Si A y B definen un par ε-regular con $d(A, B) = \delta$, y A', B' verifican que $|A'| \geq \gamma|A|$ and $|B'| \geq \gamma|B|$ para algún $\gamma \geq \varepsilon$, entonces el par $\{A', B'\}$ es $\varepsilon \cdot \text{máx}\left\{\frac{1}{\gamma}, 2\right\} -$ regular con densidad $[\delta - \varepsilon, \delta + \varepsilon]$.
3. **Problema 3:** (Ajtai-Szemerédi) Un *triángulo rectángulo isósceles* en $[2n]^2$ es un conjunto de puntos de la forma $\{(x, y), (x+h, y), (x, y+h) : x, y, h \in [n]\}$. Demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 := n_0(\varepsilon)$ tal que si $n > n_0$ entonces si $A \subseteq [2n]^2$ no contiene ningún triángulo rectángulo isosceles, entonces $A = o(n^2)$.
4. **Problema 4:** (Frankl, Graham y Rödl) Demostrar la siguiente generalización del teorema de Roth: para cada $\varepsilon > 0$ existe un valor $n_0 = n_0(\varepsilon)$ con la siguiente propiedad: suponer que G es un grupo abeliano de orden impar, $|G| > n_0$. Entonces cada subconjunto $B \subset G$ con $|B| > \varepsilon|G|$ contiene tres elementos distintos x, y, z que satisfacen $x + y = 2z$.

Referencias

[1] T. F. Bloom. A quantitative improvement for roth's theorem on arithmetic progressions. Enviado a revista. Disponible en la dirección *arXiv:1405.5800*.

[2] R. Diestel. *Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 2005.

[3] B. Green. A Szemerédi-type regularity lemma in abelian groups, with applications. *Geom. Funct. Anal.*, 15(2):340–376, 2005.

[4] D. Král, O. Serra, and L. Vena. A combinatorial proof of the removal lemma for groups. *J. Combin. Theory Ser. A*, 116(4):971–978, 2009.

[5] D. Král, O. Serra, and L. Vena. A removal lemma for systems of linear equations over finite fields. *Israel J. Math.*, 187:193–207, 2012.

[6] O. Serra and L. Vena. On the number of monochromatic solutions of integer linear systems on abelian groups. *European J. Combin.*, 35:459–473, 2014.

[7] A. Shapira. A proof of Green's conjecture regarding the removal properties of sets of linear equations. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 81(2):355–373, 2010.