Análisis y geometría en grupos

Andrzej Zuk

Cusco, 2015

1 Grupos

1.1 Amenabilidad

Definición :
Un grupo Γ es *amenable* si existe $\mu : 2^\Gamma \longrightarrow [0;1]$ tal que :

1. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ para cualquier par (A, B) de las subconjuntos disjuntas de Γ ;
2. $\mu(\Gamma) = 1$;
3. $\mu(gA) = \mu(A)$ para cada subconjunto A de Γ y g en Γ.

Notas :
- Si Γ es finito, necesariamente $\mu(A) = \frac{|A|}{|\Gamma|}$.
- Como se demostrará más tarde, un grupo puede ser amenable si y sólo si todos los subgrupos finitamente generados son amenable. Podemos, por lo tanto limitarmos a estudiar el caso de un grupo numerable.

Esta noción de amenable fue estudiado originalmente para entender la descomposición paradójica de la esfera S^2. De hecho, hay 8 subconjuntos $A_1, \cdots, A_4$ y $B_1, \cdots, B_4$ de la esfera S^2 y elementos g_i, h_i de $SO(3)$ tal que :

$$S^2 = A_1 \dot\cup \cdots \dot\cup A_4 \dot\cup B_1 \dot\cup \cdots \dot\cup B_4$$

$$S^2 = g_1(A_1) \dot\cup \cdots \dot\cup g_4(A_4) \qquad S^2 = h_1(B_1) \dot\cup \cdots \dot\cup h_4(B_4)$$

Banach, en 1922 probó que S^1 no podía tener la descomposición paradójica como S^2.
Definiciones :

- Una palabra en las letras a, a^{-1}, b, y b^{-1} se dice irreducible si $a\,a^{-1}$, $a^{-1}\,a$, $b\,b^{-1}$ y $b^{-1}\,b$ nunca aparecen.
- El grupo libre en dos elementos $F_2 =< a, b >$ es el conjunto de palabras irreductibles en a, a^{-1}, b, y b^{-1}, equipado con la operation y reducción. Su elemento neutro es la palabra vacío, y la notemos e.

Proposicion 1.1. *F_2, el grupo libre de rango 2 no es amenable.*

Demostración
Para demostrar la proposición, se exhibirá la descomposición paradójica similar a la de la esfera S^2. Probaremos que no puede existir tal medida. Pregunta :

$$A_+ = \{\text{palabras que empiezan con } a\} \quad A_- = \{\text{palabras que empiezan con } a^{-1}\}$$
$$B_+ = \{\text{palabras que empiezan con } b\} \quad B_- = \{\text{palabras que empiezan con } b^{-1}\}$$

A continuación

$$F_2 = A_+ \dot\cup A_- \dot\cup B_+ \dot\cup B_- \dot\cup \{e\}$$

y

$$a^{-1}A_+ \dot\cup A_- = F_2$$

y

$$b^{-1}B_+\dot{\cup}B_- = F_2.$$

Aplicando la medida μ :

$$1 = \mu(F_2) = \mu(A_+\dot{\cup}A_-\dot{\cup}B_+\dot{\cup}B_-\dot{\cup}\{e\})$$

Dado que la medida es invariante por translatión, en la medida de cualquier elemento es nul y, en particular $\mu(\{e\}) = 0$.

μ es una medida invariante por translatión entonces $\mu(A_+) = \mu(a^{-1}A_-)$. Por lo tanto,

$$1 = \mu(a^{-1}A_+) + \mu(A_-) + \mu(b^{-1}B_+) + \mu(B_-) = \mu(F_2) + \mu(F_2) = 2$$

Por lo tanto, esto es absurdo. $\square$

Nota : Podemos demostrar que un grupo no es amenable si y sólo si se admite una descomposición paradójica.

Proposicion 1.2. *El grupo $\mathbb{Z}$ es amenable. (Banach 1922)*

Demostración
La idea es definir $\mu(A)$ como el límite $\lim_{n\to+\infty} \frac{|A\cap[-n;n]|}{2n+1}$. El problema es que este límite no tiene sentido en principio. Podemos darle un uso de los ultrafiltros, pero es esencialmente mostrar que $\mathbb{Z}$ es amenable.

Definimos μ utilizando una funciónal también denota $\mu : l^\infty(\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}$. Vamos a obtener el valor de $\mu(A)$ definiendo : $\mu(A) = \mu(\mathbb{1}_A)$. Por lo tanto, podemos obtener una medida, aplicando la normalización

$$\mu(c.\mathbb{1}_\mathbb{Z}) = c.$$

Sea $g \in l^\infty(\mathbb{Z})$, y g_n la función g transladada en n. Más precisamente, g_n se define por :

$$g_n(k) = g(n+k)$$

Entonces podemos definir

$$H = \left\langle \sum_{\text{finito}} \big(g_i - (g_i)_{n_i}\big), n_i \in \mathbb{Z}, g_i \in l^\infty \right\rangle \subseteq l^\infty(\mathbb{Z})$$

y pedemos que

$$\mu(h) = 0$$

por todo h en H.

Gracias al teorema de Hahn-Banach, entonces podemos extender μ a todo el espacio. Para aplicar este teorema, tenemos que demostrar que

$$\|\mu_{|\mathbb{C}\mathbb{1}\oplus H}\| \leqslant 1$$

Esto es equivalente a

$$\inf_{n\in\mathbb{Z}} h(n) \leqslant 0$$

para cada $h \in \mathcal{H}$. Es fácil demostrar para $\mathbb{Z}$. $\square$

Nota : De hecho, podemos demostrar que todo grupo abeliano es amenable.

En general, si un grupo Γ contiene un grupo F_2, entonces no es amenable. De hecho, uno puede encontrar un descomposición paradójica de Γ a partir de la de F_2.

Una pregunta es si a la reciproca (Γ no amenable $\Longrightarrow F_2 \subseteq \Gamma$) es verdadera. Esta pregunta natural fue un problema abierto. Finalmente ha sido demostrado en los años 80 que no es cierta.

Un contrejemplo es el siguiente :

$$B(2,665) = < a, b | w^{665}(a,b) = 1 >$$

donde la notación $w^{665}(a,b) = 1$ significa que cada palabra del grupo, elevado a la potencia 665 es el elemento neutro.

Un teorema de Adyan y Novikov demuestra que este grupo es infinito. Volviendo a la prueba del teorema, probó que este grupo no es amenable.
Nota : Sabemos que los grupos $B(2,n)$ para $n = 2, 3, 4$ y 6 son finitos. Para 5 y 7 a 665, no lo sabemos...

Teorema 1.3. *(Følner, 50) Sea Γ un grupo numerable. Es amenable si y sólo si existe una sucesion de subconjuntos finitos A_n de Γ tal que :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|A_n \Delta g A_n|}{|A_n|} = 0 \text{ para cualquier } g \text{ en } \Gamma$$

donde gA_n es el translado del A_n para g.

Definición :
Un grupo Γ se dice de tipo finito, si tiene un subconjunto $S \subseteq \Gamma$ finito que lo genera.

Se puede demostrar que un grupo puede ser amenable si y sólo si todos sus subgrupos de tipo finito son amenables. Por lo tanto, puedemos reducir nuestro estudio a estos grupos.

Definición :
Un grupo G de tipo finito en S se dice que es de crecimiento subexponencial si $b(n) = |S^n|$ crece más lentamente que cualquier función exponencial.

Proposicion 1.4. *Si G es un grupo generado por un subconjunto S finito que es un grupo de crecimiento sub-exponencial, entonces existe una sucesión estrictamente creciente de enteros (n_k) tal que S^{n_k} es un conjunto de Følner.*

Demostración
Supongamos que no. En este caso, existe una constante $C > 0$ tal que para todo n

$$|\partial S^n| \geqslant C|S^n|.$$

Pero, $|S^{n+1}| - |S^n| = |S^{n+1} \setminus S^n| = |\partial S^n| \geqslant C|S^n|$, entonces

$$|S^{n+1}| \geqslant (1+C)|S^n| \geqslant (1+C)^{n+1}$$

La última desigualdad se obtiene por inducción en n. $\square$

Problema abierto : S^n es la sucesión de Følner, en toda su generalidad (sin necesidad de quitare una subsucesión) ?

1.2 Grupos de autómatas

Se sigue del trabajo de von Neumann que los grupos de crecimiento sub-exponencial son amenables y que esta clase es cerrada con respecto a las operaciones básicas : extensiones, cocientes, subgrupos y los limites directos. Antes de la construcción del grupo generado por el automata de la Figura 1, todos los grupos amenables conocidos podrían ser obtenidos a partir de grupos de crecimiento subexponencial utilizando las operaciones básicas descriptas anteriormente.

Sea SG_0 la clase de grupos tal que todo subgrupo finitamente generado es de crecimiento sub-exponencial. Supongamos que $\alpha > 0$ es un ordinal y que hemos definido SG_β para cada ordinal $\beta < \alpha$. Entonces si α es un ordinal límite

$$SG_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} SG_\beta.$$

Si α no es un ordinal límite, sea SG_α la clase de grupos que se puede obtener de los grupos en $SG_{\alpha-1}$ utilizando extensiones y los límites directos. Sea

$$SG = \bigcup_{\alpha} SG_\alpha.$$

Grupos en esta clase se llaman sub-exponencial amenables.

SG es la clase más pequeña de grupos que contienen los grupos de crecimiento sub-exponencial, y es cerrada con respecto a las operaciones básicas. Las clases SG_α son cerradas con respecto a cocientes y a subgrupos.

1.2.1 Definición di grupo generado para un autómata

Estudiaremos autómatas finitos, reversibles, con el mismo alfabeto en la entrada y salida, por ejemplo $D = \{0, 1, \dots, d-1\}$ para algún entero $d > 1$. En un tal autómata A se asocia un conjunto finito de estados Q, una función de transición $\varphi : Q \times D \to Q$ y una función de salida : $\psi : Q \times D \to D$; el autómata A se caracteriza por el cuaterna (D, Q, φ, ψ).

El autómata A se llama inversible si para cada $q \in Q$, la función $\psi(q, \cdot) : D \to D$ es una biyección. En este caso, $\psi(q, \cdot)$ se pueden identificar con el elemento correspondiente σ_q del grupo simétrico S_d con $d = |D|$ símbolos.

Hay una manera conveniente de representar un autómata finito por un gráfo de orientado y etiquetado $\Gamma(A)$ cuyos vértices se corresponden a los elementos de Q. Dos estados $q, s \in Q$ son unidos por una flecha etiquetado con $i \in D$ si $\varphi(q, i) = s$; cada vértice $q \in Q$ está etiquetado por el correspondiente elemento σ_q del grupo simétrico.

Los autómatas que acabamos de definir son los autómatas no iniciales. Para hacer de este autómata un autómata inicial debemos elegir un estado $q \in Q$, el estado inicial. El autómata inicial $A_q = (D, Q, \varphi, \psi, q)$ actúa en una sucesión finita o infinita en D de la siguiente manera. Para cada símbolo $x \in D$ inmediatamente da la salida $y = \psi(q, x)$ y cambia su estado inicial por $\varphi(q, x)$.

Al unirse a la salida de A_q con la entrada de otro autómata $B_s = (D, S, \alpha, \beta, s)$, se obtiene un mapa que corresponde a un autómata llamado la composición de A_q y B_s designado $A_q \star B_s$.

Este autómata se describe formalmente como el autómata cuyo conjunto de estados es $Q \times S$ y las funciones de transición y salida de Φ, Ψ se definen por

$$\Phi((x, y), i) = (\varphi(x, i), \alpha(y, \psi(x, i))),$$

$$\Psi((x, y), i) = \beta(y, \psi(x, i))$$

y con el estado inicial (q, s).

Composición $A \star B$ de dos autómatas no iniciales se define por las mismas fórmulas para las funciones de entrada y de salida, pero sin especificar el estado inicial.

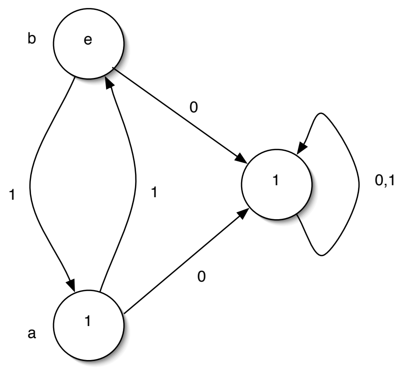


Fig. 1 – Autómata asociado a un grupo amenable.

Dos autómatas iniciales se dice que son equivalentes si determinan la misma aplicación en todos los estados. Existe un algoritmo para minimizar el número de estados.

El autómata que produce el mapa de identidad en el conjunto de sucesiones se llama trivial. Si A es inversible entonces para cada estado q el autómata A_q admite un autómata inversa A_q^{-1} tal que $A_q \star A_q^{-1}$, $A_q^{-1} \star A_q$ son equivalentes a los autómatas triviales. El autómata inverso formalmente puede ser descripto como el autómata $(D, Q, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}, q)$ donde $\widetilde{\varphi}(s, i) = \varphi(s, \sigma_s(i))$ y $\widetilde{\psi}(s, i) = \sigma_s^{-1}(i)$ para $s \in Q$. Las clases de equivalencia de autómatas finitos inversibles sobre un alfabeto D es un grupo que se llama el grupo de los autómatas finitos, que depende de D. Cada conjunto de autómatas iniciales genera un subgrupo de este grupo.

Ahora A es un autómata inversible no inicial. Sea $Q = \{q_1, \ldots, q_t\}$ el conjunto de estados de A y sea $A_{q_1}, \ldots, A_{q_t}$ todos los autómatas iniciales que pueden ser obtenidos a partir de A. El grupo $G(A) = \langle A_{q_1}, \ldots, A_{q_t} \rangle$ se llama el grupo generado por A.

Teorema 1.5. *El grupo G generado por el automata de la Figura 1 no es sub-exponencial amenable, i.e. $G \notin SG$.*

Demostración
Supongamos que $G \in SG_\alpha$ para α minimal. Entonces α no puede ser 0 ya que G es de crecimiento exponencial. Además, α no es un ordinal límite, porque si $G \in SG_\alpha$ para un ordinal límite α entonces $G \in SG_\beta$ para un ordinal $\beta < \alpha$. Además, G no es límite directo (de una sucesión creciente de grupos) ya que es de tipo finito. Así existe N, $H \in SG_{\alpha-1}$ tal que la siguiente sucesión es exacta :

$$1 \to N \to G \to H \to 1.$$

Para el grupo G, cada subgrupo normal $N \triangleleft G$ que no es trivial, hay la siguiente propiedad : existe un subgrupo de N con G su cociente. Cada clase SG_α es cerrada con respecto a cocientes y a subgrupos. Deducimos que $G \in SG_{\alpha-1}$. Contradicción. $\square$

Para demostrar la amenabilidad de G utilizamos un criterio de Kesten de paseos al azar en G.

1.3 Paseos al azar

Ahora definiremos un operador $M : l^2(\Gamma) \longrightarrow l^2(\Gamma)$ por la fórmula :

$$Mf(g) = \frac{1}{|S|} \sum_{s \in S} f(s\,g)$$

Vamos a considerar el caso especial donde $S = S^{-1}$. M es auto-adjunto, y tenemos el siguiente teorema :

Teorema 1.6. *(Kesten 1959) Γ es amenable si y sólo si $\|M\| = 1$.*

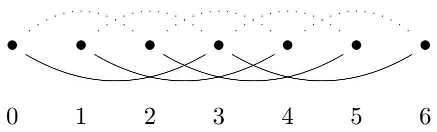
Notas :
- Es fácil ver que $\|M\| \leqslant 1$. Hay muchas caracterizaciones diferentes de la noción de amenabilidad (lo que demuestra que el concepto es rico), pero lo anterior es particularmente importante.
- Es fácil demostrar que amenabilidad implica que $\|M\| = 1$.
  De hecho, para una secuencia de Følner A_n, tenemos $\mathbb{1}_{A_n} \in l^2(\Gamma)$ y $\frac{\|M\mathbb{1}_{A_n}\|}{\|\mathbb{1}_{A_n}\|} \to 1$, por lo tanto, el resultado !

Definición :
Sea un grupo Γ de tipo finito y un subconjunto S. Decimos que $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ es un grafo de Cayley si es un grafo cuyos vértices son los elementos $\gamma \in \Gamma$ y cuyas aristas son los pares $(\gamma, s\,\gamma)$ para $s \in S$ y $\gamma \in \Gamma$.

Nota : Un grafo de Cayley depende de los generadores elegidos. Por ejemplo, en el caso de $\mathbb{Z}$, el grafo es evidente si se toma como parte de la generación a $S = \{\pm 1\}$:

$$\cdots\cdots \;-\bullet\!-\!\!-\!\!-\bullet\!-\!\!-\!\!-\underset{-1}{\bullet}\!-\!\!-\!\!-\underset{0}{\bullet}\!-\!\!-\!\!-\underset{1}{\bullet}\!-\;\cdots\cdots$$

pero también puede ser más sorprendente si se tiene $S = \{\pm 2, \pm 3\}$:



Ejemplos :

- En el caso de grupo $\mathbb{Z}^2$, podemos tomar $S = \{(0, \pm 1), (\pm 1, 0)\}$. Grafo de Cayley es entonces una malla regular del plano.
- En el caso del grupo $F_2 = < a, b >$, uno puede elegir $S = \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$. El grafo tiene la siguiente forma :

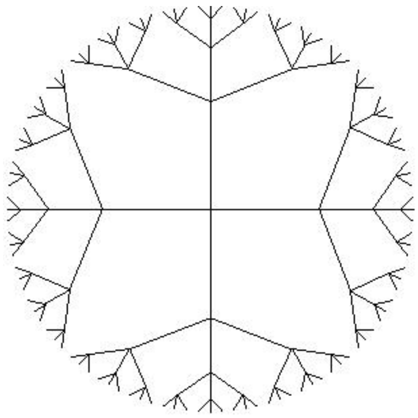


FIG. 2 – Grafo de Cayley de F_2, con $S = \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$.

Se trata de un árbol, es decir, que no tiene ciclos.

Definiciones :

- Si G es un grupo de tipo finito un subconjunto finito S que genera G es simetrico si $s \in S \implies s^{-1} \in S$.
- Por un grupo G de tipo finito y un subconjunto simetrico S que genera G, un paseo al azar en G es simple si todos los elementos de S son equiprobables.

Teorema 1.7. *Sea G un grupo de tipo finito y un subconjunto simetrico S que genera G. Para un paseo al azar simple, notemos $p_n(id, id)$ la probabilidad de volver al origen después de n pasos. El grupo G es amenable si y sólo si :*

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[2n]{p_{2n}(id, id)} = 1.$$

1.4 Funciones de tipo positivo

Definición :
Una función $\varphi : G \to \mathbb{C}$ se llama *de tipo positivo* si para todo $g_1, \cdots, g_n \in G$ y

todo $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda_i} \lambda_j \varphi(g_i^{-1} g_j) \geqslant 0$$

Ejemplo : Sea $\pi : G \to B(\mathscr{H})$ una representación del grupo G en un espacio Hilbert $\mathscr{H}$. Si fijamos un vector $\xi \in \mathscr{H}$, entonces

$$\varphi(g) = < \pi(g)\xi, \xi >$$

es una función de tipo positivo.

Teorema 1.8. *Un grupo G es amenable si y sólo si existe una sucesión de funciones de tipo positivo φ_i con supporto finito tal que*

$$\lim_{i \to \infty} \varphi_i(g) = 1$$

para cualquier $g \in G$.

Demostración
Por lo demás, sólo tenemos la existencia de una sucesión de funciones de tipo positivo para los grupos amenables.

Para tal sucesión, podemos considerar la representación regular λ. Si A_n es una sucesión de Følner y $\xi_n = \frac{1}{|A_n|}\chi_{A_n}$, a continuación,

$$\varphi_n(g) = < \lambda(g)\xi_n, \xi_n >$$

tiene las propiedades requeridas. $\square$

1.5 Grafos expansores y aplicaciones

Definiciones :

- Sea X un grafo finito, y A un subconjunto de X. Definiremos el *borde de A* y notaremos ∂A como las aretas tales que un extremo este en A y el otro en A^c.
- Definiremos una *constante isoperimetrica* para un grafo X como

$$h(X) = \min \left\{ \frac{|\partial A|}{|A|} : A \subseteq X, 1 \leqslant |A| \leqslant \frac{|X|}{2} \right\}$$

Nota : En el caso de los grafos infinitos, tomamos subconjuntos finitos A de X, y por lo tanto, eliminaremos la condición en la cardinalidad de A.

Ejemplos :
- Si $X = \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}, \{\pm 1\})$, es claro que $h(X) = 0$. Basta considerar los intervalos de números enteros $\{-n, -n+1, \cdots, n-1, n\}$ (cuyo borde es de cardinal 2) y n tiende a infinito.

– De manera más general, para cualquier grupo amenable $h(X) = 0$. En efecto, si A_n es una sucesión de Følner, se sigue que $\frac{|\partial A_n|}{|A_n|} \longrightarrow 0$, porque $|\partial A_n| \leqslant \sum_{s \in S} |A_n \Delta s A_n|$ y S es finito.
– Si $X = \mathrm{Cay}(F_2, \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\})$, entonces $h(X) = 2$.

Definición :
Una sucesión de grafos finitos X_n ($|X_n| < \infty$) de grado k (donde $k \geqslant 3$) es una *sucesión de grafos expansores* si $|X_n| \to \infty$ y que existe $c > 0$ tal que $h(X_n) \geqslant c > 0$.

No podemos producir grafos expansores de los grupos amenables como demuestra la siguiente proposición :

Proposicion 1.9. *Sea Γ un grupo amenable generado por un subconjunto finito S, y Γ_n una sucesión de cocientes finitos de Γ.*
Luego Cay(Γ_n, S) no es una sucesión de grafos expansores.

Ejemplo : Veamos un ejemplo donde Γ y Γ_n verifican las condiciones : tomamos $\Gamma = \mathbb{Z}$ y $\Gamma_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Para que la noción que se nos acaba de presentar tenga sentido debemos preguntarnos si hay grafos expansores.

Demostraremos que casi todos los grafos son grafos expansores. Podemos comparar este enfoque con la demostración de la existencia de los números trascendentes en $\mathbb{R}$. En esta demostración, se demuestra que casi todos los reales son trascendentes ! Tengamos en cuenta que es bastante fácil de probar la existencia de los números trascendente, pero es muy más difícil de producir un ejemplo.
A los efectos de nuestra demostración, introducimos conjuntos de grafos.
Definición :
Los conjuntos de grafos $X(n, k)$ se definen de la siguiente manera :
– Sus vértices son el conjunto $\{0, 1\} \times \{1, \cdots, n\}$, que puede ser representado como dos filas de n puntos cada uno, uno frente al otro. Tenga en cuenta que existen $2n$ vértices de cada grafo de $X(n, k)$.
– Las aristas se definen mediante k permutaciones $\pi_1, \cdots, \pi_k \in S_n$ asumiendo que existe una arista entre $(0, i)$ y $(1, j)$ si existe un cierto k tal que $\pi_k(i) = j$.
Es fácil comprobar que estos grafos son de grado k. También tengamos en cuenta que no identificamos grafos isomorfos.

Teorema 1.10. *Supongamos que $k \geqslant 5$. Entonces*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\#\{X \in X(n, k) : h(X) \geqslant 1/2\}}{\#X(n, k)} = 1.$$

Para demostrar el teorema, vamos a utilizar una "aproximación" de la noción de constante isoperimétrica, válida para los grafos de los tipos de $X(n, k)$, que es mucho más fácil de usar que el concepto general.
Definiciones :

– Definiremos $\partial' A' = \{x \in X \setminus A' : \text{existe una arista } (x,y) : y \in A'\}$
– Sea $X \in X(n,k)$. Definiremos I la « primera fila » de vertices de X, i.e. los puntos $\{(0,1), \cdots, (0,n)\}$, y O la segunda fila. Definiremos :

$$h'(X) = \min \left\{ \frac{|\partial' A'|}{|A'|} : A' \subseteq I, |A'| \leqslant \frac{|I|}{2} = \frac{n}{2} \right\}$$

Proposicion 1.11. *Sea $X \in X(n,k)$, entonces $h(X) \geqslant h'(X) - 1$.*

Demostración del teorema
En lugar de demostrar que $h(X) \geqslant \frac{1}{2}$, vamos a demostrar que $h'(X) \geqslant \frac{3}{2}$.
El número de todas las permutaciones $(\pi_1, \cdots, \pi_n)$ es $(n!)^k$.
Vamos a acotar el número de permutaciones que dan X con $h'(X) < \frac{3}{2}$. Si $h'(X) \leqslant \frac{3}{2}$, existe $A \subseteq I$ con $|A| < \frac{1}{2}n$ y existe $B \subseteq O$ con $|B| = \frac{3}{2}|A|$ tal que :

$$\partial' A \subseteq B$$

De este modo podemos acotar :

$$\sum_{\substack{A \subseteq I \\ |A| \leqslant \frac{n}{2}}} \sum_{\substack{B \subseteq O \\ |B| = \frac{3}{2}|A|}} \left(\frac{|B|!(n-|A|)!}{(|B|-|A|)!} \right)^k$$

No es difícil demostrar que esta expresión dividido por $(n!)^k$ tiende a 0, lo que demuestra el teorema. $\square$

1.6 Propiedad (T)

Definiciones :

– Sea $\pi : G \longrightarrow B(\mathcal{H})$ una representacion de un grupo G sobre $\mathcal{H}$. Esta representación es *unitaria* si $\pi(g) \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ para cualquier g en G.
– Diremos que una representación π *casi tiene un vector invariante* si para cado $\varepsilon > 0$ y para cado subconjunto compacto K de G, existe un vector ξ de $\mathcal{H}$:

$$\|\pi(k)\xi - \xi\| < \varepsilon \|\xi\| \text{ para cado } k \text{ en } K.$$

Nota : Si G es un groupo discreto, substituimos la condición K compacto por K finito.

Ejemplo : Sea $G = \mathbb{Z}$, $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{Z})$ y consideremos la representación regular λ :

$$\lambda(n)f(m) = f(m+n) \text{ para todo } f \in l^2(\mathbb{Z}) \text{ y } n \in \mathbb{Z}.$$

λ casi tiene un vector invariante. De hecho, sea $\xi_n = \mathbb{1}_{\{-n,\cdots,n\}}$. Consideramos un subconjunto finito K de $\mathbb{Z}$. Así que,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|\xi_n - \lambda(k)\xi_n\|}{\|\xi_n\|} = 0 \text{ para todo } k \text{ en } K.$$

Sin embargo, la representación λ no tiene un vector invariante. De hecho este vector debe ser invariante con la acción de λ, i.e. este vector es una función constante y con la norma l^2 finita.

Proposicion 1.12. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes :*

i. El grupo G es amenable;

ii. La representación regular de G casi tiene un vector invariante.

Demostración
La implicación $i \implies ii$ es muy fácil utilizando las sucesiones de Følner. En concreto, tomamos $\xi_n = \mathbb{1}_{A_n}$ y entonces se utiliza la definición de sucesiones de Følner.

Para demostrar la otra implicación, vamos a construir una sucesion de Følner. Sea K un subconjunto compacto o finito de G. Consideremos un vector casi invarinate (de norma 1) para la representación regular, i.e. $f \in l^2(G)$ tal que $\sum_{g\in G} f(g)^2 = 1$ y $\sum_{g\in G} |f_k(g) - f(g)|^2 \leqslant \varepsilon$ para todo k en K. (Recordemos que f_k representa f translato en k.)

Sea $F = f^2$. Entonces $F \in l^1(G)$, y $\|F\| = 1$. Fijamos k en K. Podemos escribir :

$$\begin{aligned}
\|F_k - F\|_1 &= \sum_{g\in G} |f_k(g)^2 - f(g)^2| = \sum_{g\in G} |f_k(g) - f(g)|\,|f_k(g) + f(g)| \\
&\leqslant \left(\sum_{g\in G} (f_k(g) - f(g))^2\right)^{1/2} \left(\sum_{g\in G} |f_k(g) + f(g)|^2\right)^{1/2} \\
&\leqslant \varepsilon^{1/2} 2\|f\|_2 = 2\varepsilon^{1/2} = \varepsilon'
\end{aligned}$$

y podemos hacer que la cantidad sea arbitrariamente pequeña.

Para todo a positivo, sea $\mathcal{U}_a = \{g \in G : F(g) \geqslant a\}$. Entonces :

$$1 = \sum_{g\in G} F(g) = \int_0^\infty |\mathcal{U}_a| da$$

y :

$$||F_k - F||_1 = \sum_{g\in\, G} |F_k(g) - F(g)| = \int_0^\infty |\mathcal{U}_a \Delta k \mathcal{U}_a| da \leqslant \varepsilon'$$

Deducimos que : $\int_0^\infty |\mathcal{U}_a \Delta k \mathcal{U}_a| da \leqslant \varepsilon' \int_0^\infty |\mathcal{U}_a| da$ y que :

$$\int_0^\infty \sum_{k\in K} |\mathcal{U}_a \Delta k \mathcal{U}_a| da \leqslant \varepsilon' |K| \int_0^\infty |\mathcal{U}_a| da$$

y entonces existe a tal que : $\sum_{k\in K} |\mathcal{U}_a \Delta k \mathcal{U}_a| \leqslant \varepsilon' |K|\, |\mathcal{U}_a|$.

Finalmente sea $\varepsilon'' = \varepsilon' |K|$. Entonces :

$$|\mathcal{U}_a \Delta k \mathcal{U}_a| \leqslant \varepsilon'' |\mathcal{U}_a| \text{ para todo } k \text{ en } K.$$

□

Definición :
(Kazhdan 1967) G tiene la *propiedad (T)* si cualquier representación unitaria de G que casi tiene un vector invariante, tiene un vector invariante.

Ejemplo : $\mathbb{Z}$ no tiene la propiedad (T). De manera más general, un grupo amenable casi tiene un vector invariante pero tiene vectores invariantes si y sólo si es finito.

Proposicion 1.13. *Sea G un grupo de tipo finito, y S un subconjunto finito que genera G. Supongamos que G tiene la propiedad (T). Si G_n es una sucesión de cocientes finitos de G, entonces existe una constante $c > 0$ tal que*

$$h\left(Cay(G_n, S)\right) \geqslant c,$$

i.e. $Cay(G_n, S)$ es una sucesión de grafos expansores.

Demostración
Supongamos que esta constante c no existe. Vamos a construir una representación de G que casi tiene un vector invariante, pero no hay vectores invariantes.

Si esta constante c no existe, para todo $\varepsilon > 0$ existe un grupo G_n tal que $h(\mathrm{Cay}(G_n, S)) \leqslant \varepsilon$, i.e. existe un subconjunto $A_n \subseteq G_n$ con $|A_n| \leqslant \frac{|G_n|}{2}$ tal que para todo s de S,

$$\frac{|A_n \Delta s A_n|}{|A_n|} \leqslant \varepsilon$$

Consideramos $\mathbb{1}_{A_n} \in l^2(G_n)$. Entonces

$$\|\mathbb{1}_{A_n} - s\mathbb{1}_{A_n}\|_2^2 = \|\mathbb{1}_{A_n} - \mathbb{1}_{s\,A_n}\|_2^2 \leqslant \varepsilon \|\mathbb{1}_{A_n}\|_2^2 \tag{1.1}$$

i.e. el vector $\mathbb{1}_{A_n}$ es casi invariante. El problema es que $\mathbb{1}_{G_n}$ es un vector invariante.

Para evitar este problema, consideramos el espacio vectorial

$$l_0^2(G_n) = \{f \in l^2(G_n), \sum_{g \in G} f(g) = 0\}$$

Sea a una constante positiva tal que $|A_n| = a|A_n^c|$. Entonces $\mathbb{1}_{A_n} - a\mathbb{1}_{A_n^c} \in l_0^2(G)$. Podemos aumentar a : $|A_n| \leqslant \frac{|G_n|}{2}$ implica que $a \leqslant 1$.

Por otra parte, podemos escribir $\mathbb{1}_{A_n^c} = \mathbb{1}_{G_n} - \mathbb{1}_{A_n}$. Esto nos lleva a $\mathbb{1}_{A_n} - a\mathbb{1}_{A_n^c} = (1 + a)\mathbb{1}_{A_n} - a\mathbb{1}_{G_n}$.

Para probar el análogo de (1.1) de este vector, se escribe :

$$\begin{aligned}
\|(1 + a)\mathbb{1}_{A_n} - a\mathbb{1}_{G_n} - ((1 + a)\mathbb{1}_{s\,A_n} - a\mathbb{1}_{s\,G_n})\| &= (1 + a)\,\|\mathbb{1}_{A_n} - \mathbb{1}_{s\,A_n}\| \\
&\leqslant \varepsilon(1 + a)\|\mathbb{1}_{A_n}\| \\
&\leqslant 2\varepsilon\|\mathbb{1}_{A_n} - a\mathbb{1}_{A_n^c}\|
\end{aligned}$$

La primera desigualdad proviene de (1.1). La segunda de $a \leqslant 1$ y de $\|\mathbb{1}_{A_n}\| \leqslant \|\mathbb{1}_{A_n} - a\mathbb{1}_{A_n^c}\|$. Este último aumento se demuestra el usando que $\mathbb{1}_{A_n}$ y $\mathbb{1}_{A_n^c}$ son ortogonales en $l^2(G_n)$.

Así, hemos construido una representación de G que casi tiene un vector invariante y no tiene un vector invariante lo que contradice el hecho de que G tiene la propriedad (T). □

Introducción a la propiedad (T), Kazhdan tenía idea de usarlo para estudiar los subgrupos discretos de los grupos de Lie. Podemos plantear el siguiente problema :

> Si Γ es un subgrupo discreto de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ con $\mathrm{Vol}(\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\Gamma) < \infty$, nos preguntamos si Γ es de typo finito.

Si $n = 2$, respuesta es positiva y se conoce desde los trabajos de Poincaré. Para que la misma afirmación sea cierta para $n \geqslant 3$, Kazhdan introdujo un nuevo enfoque.

Proposicion 1.14. *(Kazhdan) Si G es numerable y tiene la propiedad (T), entonces G es de typo finito.*

Demostración
Númeremos los elementos de $G : G = \{g_1, g_2, \cdots\}$. Ahora definiremos G_n como el subgrupo de G generado por $\{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$. Si G no es de tipo finito, para todo n, $|G : G_n| = \infty$. Notamos que G/G_n es un cociente pero no es siempre un grupo.

Cosideramos $\oplus_{n\in\mathbb{N}}\, l^2(G/G_n)$. Para todo n, G actúa en G/G_n. Para todo $n_0 \in \mathbb{N}$, podemos considerar $\delta_{n_0} \in \oplus l^2(G/G_{n_0})$ que se define por :

$$\delta_{n_0} = (0, \cdots, 0, \underbrace{\delta_{G_{n_0}}}_{\in\, l^2(G/G_{n_0})}, 0, \cdots)$$

donde $\delta_{G_{n_0}}$ es una función que es 1 para G_{n_0} y 0 de otro modo.

Claramente, δ_n es invariante para G_n. Pero por cada subconjunto finito K de G, existe n tal que $K \subseteq G_n$. Así que esta representación casi tiene vectores invariantes, pero no hay un vector invariante lo cual contradice la propiedad (T). $\square$

Todavía tenemos que preguntarnos, cómo probar la propiedad (T) ! La respuesta esta dada por el teorema Kazhdan :

Teorema 1.15. *Si G es un grupo de Lie, y si $\Gamma \subseteq G$ es reticulado (es dice que Γ es discreto y que $Vol(G/\Gamma) < \infty$) entonces G tiene la propiedad (T) si y sólo si Γ tiene la propiedad (T).*

Demostración
Para demostrar la implicación que nos interesa, sólo se tiene que inducir a la representación de Γ en G. $\square$

Proposicion 1.16. *Si G tiene la propriedad (T) entonces $|G/G'| < \infty$, donde G' es la abelianisación de G.*

Demostración
Si G/G' es infinito, tenemos un epimorfismo $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{Z}$. Dado que $\mathbb{Z}$ no tiene la propiedad (T), podríamos construir una representación unitaria de G que casi tiene vectores invariantes, y que no tiene vectores invariantes distinto de cero. $\square$

Recuerde el siguiente problema, que data de los años 20 :

> Medida de Lebesgue es la única medida finitamente aditiva en S^n, invariante bajo $SO(n+1)$, definida en los conjuntos medible Lebesgue de medida total 1 ?

Para $n = 1$, Banach en los años 20 dio una respuesta negativa a la pregunta.

Para $n \geqslant 4$, Margulis y Sullivan demostraron que la respuesta es afirmativa. Para demostrar esta propiedad, que utiliza la propiedad (T).

Drinfeld finalmente demostro que la respuesta es afirmativa para los casos más difíciles, $n = 3$ y 2.

La uncidad se demostró con la siguiente propiedad : hay k elementos ρ_i de $SO(n+1)$ y $\varepsilon > 0$ tal que para todo $f \in L_0^2(S^n)$

$$\max_i \|f - \rho_i f\|_2 \geqslant \varepsilon \|f\|_2,$$

lo que implica que no hay vectores invariantes.

No obstante, sigue siendo un problema abierto, si la propiedad vale si elegimos las rotaciones ρ_i al azar.

1.7 Funciones condicionalmente de tipo negativo

Definición :
Una función $\varphi : G \to \mathbb{R}$ es condicionalmente *de tipo negativo* si

1. $\varphi(\mathrm{Id}) = 0$
2. para todo $g_1, \cdots, g_n \in G$ y $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$$

fue

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j \varphi(g_i^{-1} g_j) \leqslant 0$$

Existe una relación directa entre las funciones de tipo positivo y las funciónes condicionalmente de tipo negativo.

Teorema 1.17. *Una función $\varphi : G \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(\mathrm{Id}) = 0$ es condicionalmente de tipo negativo si y sólo si para todo $t > 0$*

$$e^{-t\varphi}$$

es de typo positivo.

Podemos mostrar la siguiente caracterización de la propiedad (T).

Teorema 1.18. *Un grupo G tiene la propiedad (T) si y sólo si cualquier función condicionalmente de tipo negativo en G es acotada.*

Ejemplo : Para un grupo G generado por un subconjunto finito S, podemos definir la norma $\|g\|_S$ para $g \in G$ como el mínimo número de generadores necesarios para escribir g.

Se puede demostrar que los grupos libres con respecto a conjunto de generatores estándar es condicionalmente de tipo negativo.