Examen partiel

Durée : 2h.

Tout document interdit, tout appareil électronique interdit.

Exercice 1

Soit $n \geqslant 1$ un entier. On considère la famille à 1 paramètre $t \in [0,1]$ de polynômes :

$$p(z;t) = z^n + a_{n-1}(t)z^{n-1} + \cdots + a_1(t)z + a_0(t)\,,$$

où les a_i sont des fonctions continues de t. On suppose que le polynôme $p(z;0) \in \mathbb{C}[z]$ possède k zéros comptés avec multiplicité dans le disque ouvert $D(0,R)$ de centre 0 et de rayon $R > 0$ et ne s'annule pas sur le cercle de centre 0 et de rayon R.

Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t < \varepsilon$ le polynôme $p(z;t)$ a également k zéros comptés avec multiplicité dans $D(0,R)$.

Exercice 2

Déterminer toutes les fonctions f méromorphes sur $\mathbb{C}$ satisfaisant :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}\,, |f(z)| \leqslant \left(\frac{2|z|}{|z-1|}\right)^{\frac{3}{2}}\,.$$

Problème

L'objectif de ce problème est l'étude d'intégrales à paramètre du type

$$\int_0^\infty f(x)x^{\lambda-1}\mathrm{d}x\,.$$

Cette intégrale, vue comme fonction du paramètre λ, est appelée *transformée de Mellin de f*.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Justifier brièvement que l'on peut définir correctement une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ par $z \mapsto (-z)^{\lambda-1}$.

   Soit F une partie finie de $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^+$ et f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus(F\cup\{0\})$, méromorphe sur $\mathbb{C}$. On fixe un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. On considère la courbe fermée lisse par morceaux $\gamma_{\varepsilon,r,R}$ relative aux paramètres $\varepsilon, r, R \in \mathbb{R}_{>0}$ (voir la figure 1 jointe, précisant le support et l'orientation de cette courbe).

2. Justifier que l'on peut choisir les paramètres ε, r, et R de sorte que $\mathrm{Ind}(\gamma_{\varepsilon,r,R}; a) = 1$ pour tout $a \in F$.

3. On définit la fonction g_λ sur $\mathbb{C} \setminus (F \cup \mathbb{R}^+)$ par $g_\lambda(z) = (-z)^{\lambda-1}f(z)$.

(a) Montrer que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{\gamma^1_{\varepsilon,r,R}} g_\lambda(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma^3_{\varepsilon,r,R}} g_\lambda(z)\mathrm{d}z\right) = 2i\sin(\pi\lambda)\int_r^R t^{\lambda-1}f(t)\mathrm{d}t\,,$$

où les notations pour les contours d'intégration sont celles précisées sur la figure 1.

(b) On fait les hypothèses supplémentaires suivantes sur f et λ :

$$\lim_{\substack{z\in\mathbb{C}\setminus F\\ |z|\to 0}} |z|^\lambda f(z) = 0\,,\qquad \lim_{\substack{z\in\mathbb{C}\setminus F\\ |z|\to \infty}} |z|^\lambda f(z) = 0\,. \tag{1}$$

Donner une majoration de chacune des intégrales :

$$\left|\int_{\gamma^2_{\varepsilon,r,R}} g_\lambda(z)\mathrm{d}z\right|\,,\qquad \left|\int_{\gamma^4_{\varepsilon,r,R}} g_\lambda(z)\mathrm{d}z\right|\,.$$

(c) Déduire, sous les hypothèses (1) :

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}}\int_r^R t^{\lambda-1}f(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(\lambda\pi)}\sum_{a\in F}\mathrm{Res}_a(g_\lambda)\,.$$

On s'intéresse dans la suite du problème au cas particulier où $f = R = P/Q$ est une fraction rationnelle avec P, Q des polynômes premiers entre eux à coefficients dans $\mathbb{C}$ tels que Q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$ et $\deg P \leqslant \deg Q - 1$.

4. Montrer que $h_R\colon \lambda\mapsto \int_0^\infty R(t)t^{\lambda-1}\mathrm{d}t$ définit une fonction holomorphe sur $\{\lambda\in\mathbb{C}\colon 0<\mathrm{Re}\,\lambda<\deg Q-\deg P\}$.

5. Donner le développement en série entière en $a\notin\mathbb{R}^+$ de $z\mapsto(-z)^{\lambda-1}$.

6. Soit F l'ensemble des zéros de Q dans $\mathbb{C}$. Notons

$$R(z) = \sum_{k\geqslant -N(a)} c_{a,k}(z-a)^k$$

le développement en série de Laurent de R en $a\in F$.

Montrer que $\sin(\pi\lambda)h_R(\lambda)$ coïncide sur $\{\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}\colon 0<\mathrm{Re}\,\lambda<\deg Q-\deg P\}$ avec un polynôme dont on donnera une expression explicite.

7. Déduire que h_R se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$.

Exercice 3

Pour $z\in\mathbb{C}$, on pose

$$f(z) := \int_0^\infty \frac{e^{zt}}{t^t}\mathrm{d}t\,.$$

1. Montrer que f est bien définie et est entière (i.e. holomorphe sur $\mathbb{C}$).

2. On fixe un paramètre $\lambda>0$ et $z=x+iy$, où $y=\pi/2+\lambda$. En utilisant une intégration le long d'une courbe lisse par morceaux de support

$$C_{\varepsilon,R} = \{z=\varepsilon e^{i\theta}\colon 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2\}\cup[\varepsilon,R]\cup\{z=Re^{i\theta}\colon 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2\}\cup[i\varepsilon,iR]\,,$$

montrer que $|f(z)|\leqslant 1/\lambda$. En déduire que $|f|$ est bornée par $2/\pi$ hors de la bande $|\mathrm{Im}\,z|\leqslant\pi$.

3. À l'aide de f, construire une fonction entière g non nulle telle que $g(z)$ tend vers 0 lorsque $|z|$ tend vers l'infini et que z reste sur une demi-droite quelconque d'extrémité l'origine du plan. Cela contredit-il le théorème de Liouville ?