Curriculum vitæ

M. **Thierry LÉVY**
Né le 24 novembre 1976 à Nancy (France)
Nationalité française, célibataire

Adresse professionnelle : Section de Mathématiques – 2-4 rue du Lièvre – Case Postale 64 – 1211 Genève 4 – Suisse
Tél. : +41 22 379 11 45, Fax : +41 22 379 11 76
Email : `Thierry.Levy (at) unige.ch`
Page personnelle : `http://www.dma.ens.fr/~levy/`

- Du 1er septembre 2009 au 31 juillet 2010 : Détaché du CNRS, Maître d'enseignement et de recherche suppléant à la Section de Mathématiques de l'université de Genève.
- Depuis le 1er octobre 2003 : Chargé de recherches au CNRS, en poste au Département de Mathématiques et Applications de l'École Normale Supérieure de Paris, au sein de l'équipe de Probabilités. Chargé de Recherches de première classe depuis janvier 2006.
- Du 1er janvier 2002 au 30 septembre 2003 : Chargé de recherches à l'Institut de Recherche Mathématique Avancée à Strasbourg.
- Du 1er février 2001 au 31 décembre 2001 : Post-doctorant au Statistical Laboratory de Cambridge (UK), sous la tutelle de James Norris. Recruté au CNRS en mai 2001.
- De septembre 1998 à janvier 2001 : Doctorant et moniteur à l'université de Paris XI (Orsay). Thèse effectuée sous la direction d'Yves Le Jan, intitulée "Théorie de Yang-Mills sur les surfaces compactes" et soutenue le 20 décembre 2000.
- De septembre 1994 à septembre 1998 : Élève à l'École Normale Supérieure de Paris.
- Agrégation de mathématiques obtenue en juin 1997 (rang : 3^e).

Thèmes de recherche

Résumé

Le fil directeur de mon travail de recherche est la quantification stochastique de la théorie de Yang-Mills en deux dimensions. Je m'intéresse à la construction et aux propriétés des champs d'holonomie aléatoires sur des surfaces compactes, pour des groupes de structure compacts. Ce problème réunit des aspects probabilistes (construction de processus indexés par des lacets, étude de leur caractère markovien, processus de Lévy sur les groupes de Lie, grandes déviations), des aspects géométriques et analytiques (classification et discrétisation des fibrés principaux, revêtements ramifiés aléatoires, espaces de Sobolev de connexions) et algébriques (représentations des groupes de Lie, théorie des invariants).

Je m'intéresse également, depuis un peu plus de deux ans, au cas où le groupe de structure est le groupe unitaire $U(N)$, et à la limite lorsque N tend vers l'infini de la théorie associée - un sujet que les physiciens ont jusqu'à maintenant plus étudié que les mathématiciens. L'objet central de ce problème est le mouvement brownien sur le groupe unitaire $U(N)$ et sa limite lorsque N tend vers l'infini, qui est du ressort de la théorie des probabilités libres.

Présentation détaillée

La mesure de Yang-Mills. Les théories de jauge sont, dans l'arsenal des physiciens, l'un des meilleurs modèles du comportement de la matière à l'échelle de l'infiniment petit. Toutefois, ces théories sont loin d'être parfaitement comprises du point de vue mathématique et elles donnent lieu à de nombreux problèmes d'analyse et de géométrie en dimension finie et infinie.

L'aspect auquel je m'intéresse est celui de l'intégration sur l'espace des configurations pour la théorie de Yang-Mills, qui est le cadre général de la théorie électrofaible et de la chromodynamique quantique. L'existence même d'une bonne mesure de probabilités sur l'espace des configurations, qui est l'espace des connexions sur un fibré principal, quotienté par l'action du groupe de jauge, est un problème encore ouvert lorsque l'espace-temps est quadridimensionnel. Je travaille dans le cas plus simple d'un espace-temps bidimensionnel et euclidien, où l'existence d'une mesure est acquise, grâce à des travaux de Leonard Gross, Bruce Driver, et Ambar Sengupta [Gro85, Dri91, Sen97].

En quelques mots, la mesure de Yang-Mills est la loi d'un processus aléatoire à valeurs dans un groupe de Lie compact G, qu'on appelle le groupe de structure, et indexé par un ensemble de chemins assez réguliers sur une variété différentiable M de dimension 2, compacte, orientable ou non, et éventuellement avec un bord, le long duquel des conditions au bord peuvent être imposées. Cette variété M joue le rôle de l'espace-temps. L'intuition physique et géométrique de ce processus est qu'il représente l'holonomie aléatoire induite par une connexion aléatoire sur un G-fibré principal au-dessus de M, lorsque cette connexion est distribuée selon la mesure de Gibbs associée à l'énergie (ou action, si l'on considère une des deux dimensions de M comme une dimension de temps) de Yang-Mills, qui à une connexion associe le carré de la norme L^2 de sa courbure. Ainsi, lorsque le groupe G est abélien, la courbure de cette connexion aléatoire devrait être un bruit blanc sur M à valeurs dans l'algèbre de Lie de G. Lorsque G n'est pas abélien, on peut dans une certaine mesure se ramener à cette situation gaussienne. Cette remarque fondamentale est le point de départ des travaux sur ce sujet de L. Gross, B. Driver et A. Sengupta, qui ont construit un processus d'holonomie aléatoire comme une fonctionnelle assez compliquée d'un bruit blanc sur M à valeurs dans l'algèbre de Lie de G.

Une autre façon de penser à la mesure de Yang-Mills est d'y penser comme à un mouvement brownien sur G indexé par des chemins sur M. La symétrie de jauge qui sous-tend toute la théorie fait qu'on ne perd rien à se restreindre aux lacets sur M ou même, pourvu que M soit connexe, aux lacets basés en un point particulier. Dans le cas d'un disque par exemple, sans condition au bord, si l'on considère une famille à un paramètre $(l_t)_{t\in[0,1]}$ de cercles basés en un même point et tels que l'intérieur de l_s soit d'aire s et contenu dans l'intérieur de l_t pour tous $s \leq t$, alors la famille correspondante de variables aléatoires à valeurs dans G, indexée par $[0, 1]$, a la loi d'un mouvement brownien sur G. Bien entendu, une deuxième famille de lacets dont les intérieurs croissent de la même façon mais ne sont pas disjoints des intérieurs des lacets de la première famille produirait un second mouvement brownien qui ne serait pas indépendant du premier. Une construction analogue avec une famille de lacets sur une sphère, où les lacets finissent par faire le tour de la sphère et revenir à un lacet constant, donne non un mouvement brownien mais un pont brownien sur G. Sur des surfaces de genre supérieur, on obtient de cette façon des ponts browniens issus de l'identité mais dont la loi finale dépend du genre de la surface. Ce point de vue, sans réellement suffire à décrire la mesure, montre en quel sens elle est liée au mouvement brownien usuel sur le groupe de structure.

Champs d'holonomie markoviens. Mes premiers travaux [2] ont consisté à donner une nouvelle construction de la mesure, que j'ai ensuite progressivement améliorée et généralisée jusqu'à maintenant [5,7]. Ce qui caractérise ces constructions est qu'elles partent de modèles discrets et procèdent par approximation par des mesures sur des espaces de dimension finie. Plus précisément, pour construire le processus d'holonomie aléatoire, on décrit ses lois marginales de dimension finie, puis on applique un théorème de Kolmogorov. Toutefois, le fait que ce processus soit indexé par un ensemble de chemins pose des problèmes spécifiques, comme le fait qu'il n'est pas possible de décrire simplement toutes ses marginales. Il faut donc procéder à des approximations, dont la qualité détermine la classe de chemins le long desquels on saura définir une holonomie aléatoire. Dans [2], j'étais parvenu à définir un processus indexé par des chemins lisses par morceaux et associé, dans le sens décrit au paragraphe précédent, au mouvement brownien sur un groupe de Lie compact connexe. Dans [7], j'ai défini, pour chaque processus de Lévy sur G satisfaisant quelques hypothèses techniques et jouant le rôle du mouvement brownien dans la mesure de Yang-Mills classique, un processus indexé par les chemins rectifiables sur M. Plusieurs éléments indiquent que cette classe de lacets doit être à peu près la meilleure qu'on puisse obtenir avec les techniques mises en oeuvre dans ce travail. En outre, j'ai établi pour ces processus un cadre axiomatique analogue à celui des processus de Markov classiques, mais où les transitions, au lieu d'avoir lieu le long d'intervalles de temps, ont lieu le long de surfaces, vues comme des cobordismes entre des familles de cercles. Ce point de vue est inspiré par les théories topologiques des champs quantiques en deux dimensions, et fait jouer au tenseur traditionnellement noté $Z(M)$, l'élément de l'espace vectoriel $Z(\partial M)$ associé à une surface M, le rôle du noyau de transition le long de cette surface pour le processus d'holonomie aléatoire.

Le fait de considérer des processus de Lévy sur le groupe de structure plutôt que le seul mouvement brownien, donc des processus avec sauts, a permis de considérer des groupes non connexes et tout particulièrement des groupes finis. Dans ce cas des groupes finis, j'ai montré que le champ d'holonomie aléatoire que je construis est le champ de monodromie d'un revêtement ramifié aléatoire au-dessus de la surface considérée. Dans ce cas très simple, le processus indexé par des lacets est donc explicitement réalisé comme un processus de transport parallèle, pour une connexion qui, en un sens peu rigoureux, est plate partout sauf en un ensemble fini aléatoire de points distribué comme un processus ponctuel de Poisson.

Grandes déviations. Dans le cas classique de la mesure de Yang-Mills associée au mouvement brownien sur un groupe connexe, on ne dispose d'aucune interprétation aussi explicite du processus qu'on appelle pourtant d'holonomie aléatoire. En effet, la construction de ce processus ne fait aucunement intervenir l'espace des connexions sur un fibré principal et encore moins l'action de Yang-Mills. Lors de mon post-doctorat à Cambridge, nous avons, avec James Norris, commencé à nous intéresser au comportement de la mesure lorsque le volume total de l'espace-temps tend vers 0, ce qui correspond à la limite semi-classique de la théorie. Des travaux, notamment d'Edward Witten [Wit91], puis de Robin Forman [For93] et Kefeng Liu [Liu96], avaient montré qu'il existe une limite à la mesure de Yang-Mills lorsque le volume de l'espace-temps tend vers 0, qui est la mesure de volume symplectique sur l'espace des modules de connexions plates. Indépendamment de ces résultats, nous avons établi dans [4] un principe de grandes déviations associé à cette limite, qui est le premier et à ce jour le seul résultat rigoureux faisant intervenir à la fois la mesure et l'action de Yang-Mills. Ce résultat peut être rapproché du théorème de Schilder qui établit également un lien entre la mesure de Wiener et la norme de Sobolev H^1. Dans ce travail, nous avons utilisé des résultats profonds d'analyse sur les espaces de Sobolev de connexions, en particulier un célèbre théorème de compacité dû à Karen Uhlenbeck [Uhl82]. Nous avons aussi dû résoudre des problèmes de minimisation sous contrainte et construire explicitement des connexions lipschitziennes dont l'holonomie était prescrite le long des arêtes d'un graphe et dont l'action était minimale étant donné cette contrainte.

Discrétisation des fibrés non-triviaux. Dès qu'il devient nécessaire de considérer ou de construire explicitement des connexions sur des fibrés principaux se pose la question de la classe d'isomorphisme du fibré qu'on considère. Or la construction de la mesure de Yang-Mills par passage à la limite d'un modèle discret présentée dans [2] semblait avoir un défaut ennuyeux par rapport à l'approche continue d'A. Sengupta, qui était de ne pas pouvoir prendre en compte une classe particulière d'isomorphismes de fibrés principaux. En effet, la discrétisation de l'espace-temps qui consiste à le remplacer par un graphe fait disparaître toute la topologie du fibré principal qu'on choisit au-dessus de M. Or A. Sengupta avait réussi à construire une mesure pour chaque classe d'isomorphisme de G-fibrés principaux. La mesure construite dans [2] est en fait un barycentre des mesures associées à toutes les classes d'isomorphisme possibles, qui sont classifiées par le groupe fondamental de G. Dans [5], j'ai modifié la théorie discrète usuelle afin qu'elle puisse incorporer la topologie du fibré principal qu'on choisit au-dessus de M. Pour cela, j'ai remplacé l'espace de configurations usuel des théories de jauge sur réseau par un espace plus gros, qui en est à peu de choses près un revêtement. En passant à la limite continue, j'ai ainsi pu obtenir une construction des mesures associées à des fibrés particuliers, et désintégrer la mesure construite dans [2]. J'ai également démontré que les processus d'holonomie associés à des fibrés non-équivalents ont des lois mutuellement singulières.

Boucles de Wilson. Outre le type topologique du fibré principal avec lequel on travaille, un problème qui se pose naturellement dans le cadre de la théorie discrète, où l'espace-temps continu est remplacé par un graphe, est celui de l'identification d'une bonne classe d'observables sur l'espace de configurations. Plus précisément, il n'est pas évident que la classe habituellement considérée par les physiciens, à savoir l'algèbre engendrée par les boucles de Wilson, qui sont les traces des holonomies le long de lacets, soit complète, c'est-à-dire qu'elle sépare les points de l'espace de configuration. Les cas où le groupe de structure est unitaire ou orthogonal impair, ou un produit de tels groupes, avaient été résolus positivement par des travaux de Bergfinnur Durhuus [Dur80] puis d'Ambar Sengupta [Sen94]. En utilisant un peu de théorie classique des invariants et une autre famille naturelle d'observables, les réseaux de spin (en anglais "spin networks"), inventés dans les années 70 par Roger Penrose et introduits à la fin des années 90 dans les théories de jauge par John Baez, j'ai démontré dans [3] la complétude de l'algèbre engendrée par les boucles de Wilson pour tous les produits de groupes unitaires, orthogonaux et symplectiques. Le cas des groupes de spineurs reste cependant ouvert.

La limite $N \to \infty$. Outre la limite semi-classique, il en est une autre qui a suscité une importante littérature physique et qui est la "large N limit", c'est-à-dire la limite lorsque N tend vers l'infini de la théorie associée au groupe de structure $U(N)$. Isadore Singer a publié un court article [Sin95] sur le sujet dans lequel il ouvre des perspectives mathématiques où pour l'essentiel tout reste à faire. Puisque la mesure de Yang-Mills repose sur le mouvement brownien, la première chose à comprendre pour étudier la "large N limit" est le comportement asymptotique du mouvement brownien sur $U(N)$ dans cette limite. Ce comportement a été étudiée principalement par Philippe Biane [Bia97], ainsi que par Feng Xu [Xu97]. Plus récemment, Ambar Sengupta [Sen08] a clarifié le travail de F. Xu. Dans [6], j'ai établi un lien entre le mouvement brownien sur le groupe unitaire et une marche aléatoire très simple sur le groupe symétrique, qui peut se comprendre comme une conséquence de la dualité de Schur-Weyl ou de la formule d'Itô. Ce lien m'a permis de donner une expression combinatoire des moments de la distribution des valeurs propres d'une matrice unitaire prise sous la mesure du noyau de la chaleur. Cettte expression se présente comme une série, convergente, qui fait intervenir des puissances paires négatives de N et qui peut être interprétée rigoureusement comme un développement suivant le genre d'un certain revêtement ramifié aléatoire d'un disque. Ceci fournit en fait une preuve rigoureuse de la plus simple des formules merveilleuses que donnent David Gross et Washington Taylor dans [GT93]. L'expression que j'ai établie permet également de retrouver les moments de la distribution limite des valeurs propres et des résultats de liberté asymptotique (au sens des probabilités libres) obtenus par P. Biane.

Mouvement brownien sur $U(N)$. La familiarité avec le mouvement brownien unitaire acquise lors de ce travail m'a permis, avec Florent Benaych-Georges, de construire dans [8] une famille de structures de dépendance (ou d'indépendance) dans un espace de probabilités non-commutatif qui interpolent entre l'indépendance classique et la liberté. Il était connu que si A et B sont deux grandes matrices diagonales réelles dont les valeurs propres se répartissent approximativement selon deux mesures de probabilités μ et ν, et si U est une matrice de permutation choisie uniformément (resp. une matrice unitaire choisie sous la mesure de Haar), alors les valeurs propres de $A + UBU^{-1}$ se répartissent selon la mesure $\mu*\nu$, convolution classique de μ et ν (resp. selon la mesure $\mu \boxplus \nu$, convolution libre de μ et ν). En donnant à U la loi au temps t d'un mouvement brownien convenablement normalisé sur le groupe unitaire dont la loi au temps 0 est la loi uniforme sur les matrices de permutation, nous avons défini une opération convolution $*_t$ pour tout t réel positif, qui pour $t = 0$ est la convolution classique et pour t tendant vers l'infini tend vers la convolution libre. Nous avons en fait défini la structure de dépendance entre deux sous-algèbres d'un espace de probabilités non-commutatif qui sous-tend cette convolution. Notre espoir initial était de trouver des cumulants associés à cette convolution t-libre, dont nous pensions qu'ils pourraient réaliser une interpolation entre les cumulants classiques, liés à la combinatoire des partitions d'un ensemble, et les cumulants libres, liés aux partitions non-croisées d'un ensemble muni d'un ordre cyclique. Cet espoir a été déçu et nous avons démontré qu'il n'existait pas de cumulants t-libres.

En utilisant des techniques proches, dans un travail en cours [9] avec Mylène Maïda, nous avons établi un théorème de la limite centrale pour des fonctions sur le groupe unitaire du type $U \mapsto \mathrm{tr} f(U)$, où f est une fonction suffisamment régulière sur le cercle unité du plan complexe et où tr est la trace normalisée. La fonction f étant donnée, l'expression $\mathrm{tr} f(U)$ a un sens pour U élément de $U(N)$ quel que soit N. Les résultats de P. Biane décrivent sa limite lorsque N tend vers l'infini, qui est une limite presque-sûre. Nous étudions ses fluctuations et la forme quadratique sur l'espace des fonctions qui donne la covariance limite de ces fluctuations s'exprime naturellement dans le cadre des probabilités libres, en termes du mouvement brownien unitaire libre.

Références

[Bia97] Philippe Biane. Free Brownian motion, free stochastic calculus and random matrices. In *Free probability theory (Waterloo, ON, 1995)*, volume 12 of *Fields Inst. Commun.*, pages 1–19. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[Dri91] Bruce K. Driver. Two-dimensional Euclidean quantized Yang-Mills fields. In *Probability models in mathematical physics (Colorado Springs, CO, 1990)*, pages 21–36. World Sci. Publishing, Teaneck, NJ, 1991.

[Dur80] Bergfinnur Durhuus. On the structure of gauge invariant classical observables in lattice gauge theories. *Lett. Math. Phys.*, 4(6) :515–522, 1980.

[For93] Robin Forman. Small volume limits of 2-d Yang-Mills. *Comm. Math. Phys.*, 151(1) :39–52, 1993.

[Gro85] Leonard Gross. A Poincaré lemma for connection forms. *J. Funct. Anal.*, 63(1) :1–46, 1985.

[GT93] David J. Gross and Washington Taylor. Twists and Wilson loops in the string theory of two dimensional QCD. *Nuclear Physics B*, 403 :395, 1993.

[Liu96] Kefeng Liu. Heat kernel and moduli space. *Math. Res. Lett.*, 3(6) :743–762, 1996.

[Sen94] Ambar Sengupta. Gauge invariant functions of connections. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 121(3) :897–905, 1994.

[Sen97] Ambar Sengupta. Gauge theory on compact surfaces. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 126(600) :viii+85, 1997.

[Sen08] Ambar N. Sengupta. Traces in two-dimensional QCD : the large-N limit. In *Traces in Geometry, Number Theory and Quantum Fields*, pages 193–212. Vieweg, 2008.

[Sin95] Isadore M. Singer. On the master field in two dimensions. In *Functional analysis on the eve of the 21st century, Vol. 1 (New Brunswick, NJ, 1993)*, volume 131 of *Progr. Math.*, pages 263–281. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1995.

[Uhl82] Karen K. Uhlenbeck. Connections with L^p bounds on curvature. *Comm. Math. Phys.*, 83(1) :31–42, 1982.

[Wit91] Edward Witten. On quantum gauge theories in two dimensions. *Comm. Math. Phys.*, 141(1) :153–209, 1991.

[Xu97] Feng Xu. A random matrix model from two-dimensional Yang-Mills theory. *Comm. Math. Phys.*, 190(2) :287–307, 1997.

Publications

Dans des revues à comité de lecture.

[1] Construction et étude à l'échelle microscopique de la mesure de Yang-Mills sur les surfaces compactes, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **330** (2000), no.11, 1019–1024.

[2] Yang-Mills measure on compact surfaces, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **166** (2003), no. 790, xiv+122 pp.

[3] Wilson loops in the light of spin networks, *J. Geom. Phys.*, **52** (2004), no. 4, 382–397.

[4] Avec James R. Norris : Large deviations for the Yang-Mills measure on a compact surface. *Comm. Math. Phys.* **261** (2006), no. 2, 405–450.

[5] Discrete and continuous Yang-Mills measure for non-trivial bundles over compact surfaces. *Probab. Theory Related Fields* **136** (2006), no. 2, 171–202.

[6] Schur-Weyl duality and the heat kernel measure on the unitary group. *Adv. Math.* **218** (2008), no. 2, 537–575.

Prépublications et travaux en préparation.

[7] Two-dimensional Markovian holonomy fields. (154 pp.) À paraître dans *Astérisque*. [arxiv :0804.2230]

[8] Avec Florent Benaych-Georges : A continuous semigroup of notions of independence between the classical and the free one. [arXiv :0811.2335v1]

[9] Avec Mylène Maïda : Central limit theorem for the heat kernel measure on the unitary group. Soumis. [arXiv :0905.3282]

Dans des revues sans comité.

[10] Comment choisir une connexion au hasard, *Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie*, 21, Année 2002-2003, 61–73.

[11] Wilson loops and spin networks. *XIVth International Congress on Mathematical Physics*, 498–504, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005.

Notes de cours.

[12] Differential equations driven by rough paths, Lecture Notes in Mathematics Vol. 1908. Notes du cours de Terry J. Lyons à l'école d'été de Saint-Flour en 2004. (rédigées avec Michael J. Caruana)