

Sujets d'exposés de maîtrise 2007

Liste des exposés proposés

Équations stochastiques en dimensions finie et infinie <i>Arnaud Basson</i>	4
Analyticité en x pour les équations de Navier-Stokes dans L^p <i>Arnaud Basson</i>	5
Sommes de trois carrés <i>Yves Benoist</i>	6
Le problème du cercle <i>Yves Benoist</i>	6
Équations différentielles et équations de transport <i>Patrick Bernard</i>	7
Sous-solutions régulières de l'équation de Hamilton-Jacobi <i>Patrick Bernard</i>	8
Le coalescent de Kingman <i>Jean Bertoin</i>	9
Systèmes de particules <i>Thierry Bodineau</i>	9
Inégalités de Strichartz <i>Raphaël Côte</i>	10
Groupes de tresses : convergence de la méthode du retournement des mots <i>Patrick Dehornoy</i>	11
Mélange de cartes, phénomène de cutoff et marche aléatoire sur les groupes <i>Christophe Garban</i>	12
Théorème de point fixe de Brouwer et formes quadratiques <i>Philippe Gille</i>	13
Orbites de $SL(2, \mathbb{Z})$ dans le plan \mathbb{R}^2 <i>Antonin Guilloux</i>	13
Le théorème de Gabriel <i>Bernhard Keller</i>	14
Convolution libre et partitions non croisées <i>Thierry Lévy</i>	15
Factorisation des polynômes à coefficients rationnels <i>François Loeser</i>	16
Clôture algébrique du corps $\mathbb{F}_q(t)$ et automates finis <i>François Loeser</i>	16
Octonions <i>David Madore</i>	17
Singularités des surfaces cubiques <i>David Madore</i>	18
Sur les graphes aléatoires <i>Philippe Marchal</i>	18
Inégalités fonctionnelles et ÉDPs <i>Stéphane Mischler et Clément Mouhot</i>	19
Théorie spectrale et ÉDPs <i>Stéphane Mischler et Clément Mouhot</i>	20

Étude d'apparition de singularités pour des ÉDPs de la mécanique des fluides <i>Stéphane Mischler et Clément Mouhot</i>	21
Passage du microscopique au macroscopique <i>Stéphane Mischler et Clément Mouhot</i>	22
L'arbre de Bruhat-Tits <i>Rachel Ollivier</i>	23
Sur le groupe de l'icosaèdre <i>Frédéric Paulin</i>	24
Itération de Pappus et groupe modulaire <i>Frédéric Paulin</i>	24
Théorie de l'approximation et analyse hilbertienne <i>Benoît Perthame</i>	25
La simulation "parfaite" <i>Christian Robert</i>	26
Algèbres de Temperley-Lieb <i>Marc Rosso</i>	26
Ondes de surface <i>Eric Séré</i>	27
Orbites homoclines et comportement chaotique en mécanique classique <i>Eric Séré</i>	27
Les chorégraphies <i>Eric Séré</i>	28
Estimation de densité <i>Gilles Stoltz</i>	29
Paramètre critique pour le modèle de FK-percolation <i>Marie Théret</i>	30
Zéros d'une fonction analytique aléatoire <i>Mathilde Weill</i>	31
Marches aléatoires disjointes, effacement de boucles et déterminants <i>Wendelin Werner</i>	31

Équations stochastiques en dimensions finie et infinie

Arnaud Basson (`basson@dma.ens.fr`)

Cet exposé est une introduction au calcul stochastique d'Itô et à la théorie des équations différentielles stochastiques.

On peut voir une équation différentielle stochastique comme une équation différentielle perturbée par un « bruit » aléatoire (en physique, il peut s'agir par exemple des petites perturbations imprévisibles subies par un système en évolution) :

$$y'(t) = b(t, y(t)) + \sigma(t, y(t)) \cdot \text{« bruit aléatoire »}.$$

L'objet mathématique qui modélise raisonnablement ce bruit est la dérivée (en temps) d'un mouvement brownien $B(t, \omega)$. Bien sûr, $B(t)$ n'est pas C^1 , il faut donc réécrire l'équation sous la forme

$$y(t, \omega) = y_0(\omega) + \int_0^t b(s, y(s, \omega)) ds + \int_0^t \sigma(s, y(s, \omega)) dB(s, \omega),$$

où apparaît dans le dernier terme une intégrale stochastique.

La première partie de l'exposé consistera à étudier la construction de l'intégrale stochastique d'Itô et ses principales propriétés (notamment la formule d'Itô, outil de base du calcul stochastique, qui généralise la formule de changement de variable).

La deuxième partie portera sur les équations différentielles stochastiques (en dimension finie) : on établira un théorème d'existence et d'unicité des solutions, et on traitera quelques exemples simples.

Enfin on fera quelques pas dans la théorie des équations aux dérivées partielles stochastiques, en regardant l'équation de la chaleur stochastique dans \mathbb{R}^d :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x, \omega) - \Delta u(t, x, \omega) = \frac{\partial W}{\partial t} \\ u(t = 0, x, \omega) = u_0(x, \omega) \end{cases}$$

où W désigne un processus de Wiener (généralisation du mouvement brownien dans un espace de Hilbert). On montrera que cette équation possède une unique solution que l'on étudiera. Si le temps le permet, on pourra s'intéresser ensuite à une équation non linéaire, par exemple le système de Navier-Stokes stochastique.

Références

- [1] B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations. An introduction with Applications*. Springer, 6^e éd., 2003.
- [2] G. Da Prato, J. Zabczyk, *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*. Cambridge University Press, 1992.

Analyticité en x pour les équations de Navier-Stokes dans L^p

Arnaud Basson (basson@dma.ens.fr)

Les équations de Navier-Stokes régissent le mouvement d'un fluide de vitesse $v(t, x)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v - \nu \Delta v + \nabla p = f_{\text{ext}} \\ \nabla \cdot v = 0 \\ v(t = 0, x) = v_0(x) \end{cases} \quad (1)$$

($t > 0, x \in \mathbb{R}^d$), où les inconnues sont le champ de vitesse $v(t, x) \in \mathbb{R}^d$ et la pression $p(t, x) \in \mathbb{R}$. Le coefficient ν est la viscosité du fluide (c'est une constante) ; on peut incorporer aussi dans l'équation un champ de force externe f_{ext} .

Ces équations se comportent bien dans les espaces $L^p(\mathbb{R}^d)$ lorsque $p > d$ ($v_0 \in L^p(\mathbb{R}^d)$) : elles admettent une unique solution v (au moins en temps petit). L'objectif du mémoire est de prouver que cette solution est analytique en x , en suivant la preuve originale de Z. Grujić et I. Kukavica [1]. Leur idée consiste, à partir du prolongement analytique supposé $v(t, x + iy)$, à résoudre l'équation vérifiée par $v_\alpha(t, x) = v(t, x + i\alpha t)$ ($\alpha \in \mathbb{R}^d$ est un petit paramètre), puis à s'assurer que l'on définit bien ainsi une solution analytique du système de Navier-Stokes.

La démonstration repose sur quelques techniques élémentaires d'analyse fonctionnelle (méthode du point fixe de Picard...) et d'analyse complexe. Elle sera l'occasion de se familiariser avec une méthode de résolution d'EDP. On pourra ensuite regarder d'autres résultats d'analyticité pour les équations de Navier-Stokes ou d'autres équations...

Références

- [1] Z. Grujić, I. Kukavica, *Space Analyticity for the Navier-Stokes and related Equations with Initial Data in L^p* , J. Funct. Anal. **152**, pp. 447–466 (1998).

Sommes de trois carrés

Yves Benoist (benoist@dma.ens.fr)

Quel est le nombre n de façons d'écrire un entier positif d sous la forme $x^2 + y^2 + z^2$ avec x, y, z entiers ? Une formule célèbre de Gauss relie ce nombre n au nombre h de classes de formes quadratiques binaires primitives de discriminant $-4d$.

Plus précisément, cette formule affirme que le quotient n/h vaut 24 si $d = 1$ ou 2 (mod 4), vaut 8 si $d = 3$ (mod 8) et vaut 0 si $d = 7$ (mod 8).

Le but de ce mémoire est d'en rédiger une preuve complète.

Note : Yves Benoist sera absent en mai.

Références

- [1] E. Grosswald, Representations of integers as sums of squares, chap. 4, Springer (1985)

Le problème du cercle

Yves Benoist (benoist@dma.ens.fr)

En 1802, F. Gauss remarquait que le nombre de points entiers du plan euclidien inclus dans un disque de rayon R est équivalent à l'aire du disque. Conjecturalement l'erreur est en $O(R^{1/2+\epsilon})$. En 1906, W. Sierpiński (célèbre aussi pour ses tapis mités) obtenait une majoration de l'erreur en $O(R^{2/3})$.

En 1960, H. Huber résolvait l'analogie de ce problème du cercle pour le plan hyperbolique et S. Patterson et A. Selberg obtenaient une majoration de l'erreur.

Le but de ce mémoire est de comprendre ces estimations. En particulier, on montrera que le nombre de points entiers x, y, z vérifiant $z^2 = x^2 + y^2 + 1$ et $x^2 + y^2 + z^2 < T^2$ est équivalent à $8\sqrt{2}T$.

Note : Yves Benoist sera absent en mai.

Références

- [1] M. Babillot : Points entiers et groupes discrets, sections 1 à 3, dans Panorama et Synthèses 13 SMF (2002).

Équations différentielles et équations de transport

Patrick Bernard (`pbernard@ceremade.dauphine.fr`)

Soit $X(x)$ un champ de vecteur. On considère les deux équations suivantes :

$$\dot{x}(t) = X(x(t)) \quad (\text{EDO})$$

et

$$\partial_t \mu + \operatorname{div}(\mu X) = 0. \quad (\text{EDP})$$

Formellement (c'est à dire lorsque X est assez régulier), ces équations définissent toutes deux des problèmes de Cauchy bien posés, et ces problèmes se correspondent d'une manière naturelle. Lorsque le champ X est moins régulier, ces équations deviennent plus subtiles. Pourtant, un théorème récent de Luigi Ambrosio illumine le lien entre elles : toute solution de (EDP) est une superposition de solutions de (EDO). Le mémoire consistera à comprendre ce résultat et sa preuve.

Références

- [1] L. Ambrosio, *Lecture notes on transport equation and Cauchy problem for BV vector fields and applications*, (preprint accessible gratuitement sur internet).
- [2] L. Ambrosio, N. Gigli et G. Savaré, Gradient flows, *Lectures in Math. ETH Zürich*, Birkhäuser (2005).

Sous-solutions régulières de l'équation de Hamilton-Jacobi

Patrick Bernard (`pbernard@ceremade.dauphine.fr`)

Soit $H(x, p) : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un hamiltonien. On sait que les solutions régulières de l'équation de Hamilton-Jacobi

$$H(x, du(x)) = c$$

donnent des surfaces invariantes de la dynamique hamiltonienne. En général, il n'existe pas de solution régulière. Cependant, lorsque H est convexe en p , on peut montrer l'existence de fonctions $C^{1,1}$ vérifiant l'inégalité

$$H(x, du(x)) \leq c,$$

et en déduire l'existence d'ensembles invariants remarquables de la dynamique, appelés ensembles d'Aubry-Mather.

Références

- [1] A. Fathi, Notes de cours sur KAM faible.
 - [2] A. Fathi et A. Siconolfi, *Sous solutions C^1 de l'équation de Hamilton-Jacobi*, Inv. Math. 2004.
 - [3] P. Bernard, *Sous solutions $C^{1,1}$ de l'équation de Hamilton-Jacobi*, accessible en ligne.
-

Le coalescent de Kingman

Jean Bertoin (jbe@ccr.jussieu.fr)

Le coalescent de Kingman est un processus aléatoire qui permet de décrire la généalogie de grandes populations. Le travail repose principalement sur l'étude de l'article original [1].

Les aspects principaux sont d'une part la construction du processus de coalescence, et d'autre part un théorème de représentation des lois des partitions aléatoires échangeables, qui jouent également un rôle important dans d'autres types de travaux.

Prérequis : Chaînes de Markov à temps continu, martingales.

Références

- [1] J. F. C. Kingman, *The coalescent*, Stochastic Process. Appl. 13 (1982), no. 3, 235–248.

Systèmes de particules

Thierry Bodineau (bodineau@dma.ens.fr)

Dans cet exposé, on considère un flux de particules passant à travers un système et on cherche à décrire la distribution des particules dans le régime stationnaire. L'évolution stochastique des particules peut être modélisée par une chaîne de Markov. Par exemple on peut imaginer N particules sur le réseau $\{1, \dots, L\}$, chacune pouvant sauter aléatoirement sur un site voisin si il n'est pas occupé par une autre particule. Pour ce type de dynamiques, la théorie des chaînes de Markov assure l'existence d'une mesure invariante, néanmoins la caractérisation d'une telle mesure peut s'avérer difficile.

L'objet de cet exposé sera d'étudier des systèmes où la mesure invariante peut être calculée explicitement et de faire des simulations pour étudier des dynamiques plus générales. En particulier, on cherchera à mettre en évidence les corrélations à longue portée qui apparaissent dans des dynamiques non réversibles.

Références

- [1] T. Seppalainen *Translation Invariant Exclusion Processes*, disponible à : <http://www.math.wisc.edu/~seppalai/excl-book/etusivu.html>

Inégalités de Strichartz

Raphaël Côte (`raphael.cote@ens.fr`)

On considère le problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger dans \mathbb{R}^n :

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = F, & u, F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases}$$

Si F est une donnée, la théorie de Fourier fournit une solution. Cependant, on s'intéresse en général à des cas où F dépend elle-même de u , typiquement $F = |u|^2 u$. Pour résoudre cette équation non-linéaire l'idée est d'exprimer u comme point fixe d'une certaine fonctionnelle, dont on souhaite montrer qu'elle est contractante dans un espace approprié.

Pour ce faire, on est amené à obtenir des estimations (linéaire) en temps et en espace, qui ont été introduites par Strichartz dans les années 70. Ces estimées ont fait l'objet de recherches intenses depuis vingt ans, et sont à la base de l'étude des équations dispersives.

La démonstration se fait dans un cadre abstrait général, utilise des techniques d'interpolation et d'analyse harmonique. On appliquera ensuite les estimées de Strichartz au problèmes non-linéaires.

En fonction du temps restant, on étudiera également l'équation des ondes.

Références

- [1] M. Keel et T. Tao, *Endpoint Strichartz estimates*, Amer. J. Math. 120 (1998), no. 5, 955–980.
- [2] E. Lieb et M. Loss, *Analysis*. Graduate Studies in Mathematics, 14. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001
- [3] C. Fefferman, R. Fefferman et S. Wainger, *Essays on Fourier Analysis in Honor of Elias M. Stein*, Princeton University Press 42, 1995.

Groupes de tresses : convergence de la méthode du retournement des mots

Patrick Dehornoy (dehornoy@math.unicaen.fr)

Pour chaque entier n , le groupe de tresses B_n correspond à la notion intuitive de tresses à n brins munies de l'opération de concaténation, et considérées à isotopie (= déformation) près. Introduits par Emil Artin au début du XXe siècle, les groupes de tresses sont des objets remarquables en raison de la multiplicité des approches qui y mènent, de la profondeur des résultats les concernant et, en même temps, de l'abondance de questions restant ouvertes pour le moment.

Le problème d'isotopie des tresses consiste à reconnaître si deux tresses sont ou non isotopes, ce qui, *via* un codage convenable, équivaut à reconnaître si deux mots représentent le même élément du groupe B_n défini par générateurs et relations. Il existe un très grand nombre de solutions au problème d'isotopie des tresses, mettant en jeu des structures très diverses, mais toujours non triviales. On se propose ici d'étudier une telle solution, dite méthode du retournement des mots.

Il s'agit d'un algorithme de nature syntaxique, extrêmement simple, en particulier du point de vue de la programmation, mais dont la démonstration de convergence n'est pas immédiate, et repose sur plusieurs résultats non triviaux sur les tresses, notamment la théorie de Garside qui décrit B_n comme groupe des fractions d'un monoïde admettant des ppcm.

Le sujet du travail est de comprendre cette démonstration de convergence ; pour cela, il faudra principalement maîtriser quelques outils de théorie combinatoire des groupes : présentations, graphe de Cayley.

Références

- [1] P. Dehornoy, I. Dynnikov, D. Rolfsen et B. Wiest, *Why are braids orderable ?*, Panoramas & Synthèses vol. 14, Soc. Math. France (2002).

Mélange de cartes, phénomène de cutoff et marche aléatoire sur les groupes

Christophe Garban (christophe.garban@gmail.com)

L'objet de cet exposé est l'étude des marches aléatoires (ou chaînes de Markov) sur les groupes. Soit G un groupe et $P : G \rightarrow [0, 1]$ une mesure de probabilité représentant les probas de saut.

Si la marche aléatoire part du point $g_0 \in G$, elle se déplace au point $g_1 = \tau_1 g_0$ où τ_1 est choisit suivant la loi P ($P[\tau_1 = x] = P(x)$); puis une fois en g_1 elle se déplace en $g_2 = \tau_2 \tau_1 g_0$ où $\tau_2 \sim P$ et ainsi de suite...

Un exemple que l'on étudiera en particulier est celui du groupe symétrique S_n . Dans le cas $n = 52$, cela correspond au mélange des cartes. Mélanger un paquet de cartes, cela revient à choisir une permutation suivant une certaine loi P dans S_n . Par exemple si l'on se contente de "couper" le paquet de cartes, cela revient à choisir un n -cycle au hasard (le n -cycle $(32, 33, \dots, 52, 1, \dots, 31)$ correspondant à une coupe au niveau de la 32^{ème} carte).

La question centrale dans la théorie des chaînes de Markov est de savoir combien de fois faut-il itérer la chaîne pour qu'elle se mélange bien dans son espace d'état. Dans notre exemple cela correspond à combien de fois faut-il battre le jeu de cartes pour qu'il soit bien mélangé.

Dans certains cas (comme celui de S_n où de l'hypercube $\{0, 1\}^n$) on montrera qu'en fait la chaîne de Markov converge de manière abrupte vers sa mesure d'équilibre. C'est un phénomène intrigant appelé cut-off (tout d'un coup, la chaîne passe d'un état peu mélangé à un état "diffus").

Les techniques mises en jeu sont très variées, allant des probabilités aux représentations de groupes. Toutefois le point de vue restera principalement probabiliste. L'exposé permettra de comprendre qu'il faut battre 7 fois un paquet de cartes à la manière d'un joueur de poker avant de considérer que celui-ci est bien mélangé!

Références

- [1] Persi Diaconis, *The Cutoff phenomenon in finite Markov Chains*, Proc. Natl. Acad. Sci USA (1996), disponible sur le site <http://www-stat.stanford.edu/~cgates/PERSI/>
- [2] Persi Diaconis's book, *Group Representations in Probability and Statistics* (1988)

Théorème de point fixe de Brouwer et formes quadratiques

Philippe Gille (Philippe.Gille@ens.fr)

Il s'agit principalement d'algèbre, à savoir la théorie des formes quadratiques et plus particulièrement celle des formes multiplicatives (formes de Pfister). Celle-ci permet de démontrer le théorème de point fixe de Brouwer pour les applications polynomiales de la boule unité dans elle-même et partant pour toute application continue.

Références

- [1] A. Pfister, *Quadratic forms with applications to algebraic geometry and topology*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 217 (1995), Cambridge University Press.

Orbites de $SL(2, \mathbb{Z})$ dans le plan \mathbb{R}^2

Antonin Guilloux (aguillou@dma.ens.fr)

L'objet de ce mémoire est l'étude de la répartition des orbites des points du plan sous l'action du groupe $SL(2, \mathbb{Z})$. Le but est de prouver un théorème de F. Ledrappier décrivant précisément cette répartition.

Pour cela, on s'intéresse d'abord à l'action du sous-groupe unipotent U de $SL(2, \mathbb{R})$ composé des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pour t dans \mathbb{R} , sur l'espace quotient $SL(2, \mathbb{Z}) \backslash SL(2, \mathbb{R})$. Cette action possède des propriétés dynamiques très intéressantes, et constitue le premier exemple d'une théorie beaucoup plus vaste.

Ce mémoire permet de s'initier à la géométrie des groupes de Lie, de leurs réseaux et espaces homogènes, ainsi qu'aux systèmes dynamiques.

Références

- [1] M. Ratner, *Ragunathan's conjecture for $SL(2, \mathbb{R})$* , Israel Journal of Math, 80 (1992), 1–31.
- [2] F. Ledrappier, *Distribution d'orbites de réseaux dans le plan réel*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 329 (1999), no. 1, 61–64.
- [3] A. Borel, *Introduction aux groupes arithmétiques*, Hermann, Paris, 1969.

Le théorème de Gabriel

Bernhard Keller (keller@math.jussieu.fr)

Un *carquois* est un graphe orienté. Une *représentation* d'un carquois Q sur un corps k est un diagramme de k -espaces vectoriels qui a la forme indiquée par Q . Le théorème de Gabriel établit un lien fondamental entre les représentations de carquois et la théorie des algèbres de Lie [3]. Il donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un carquois n'admette qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de représentations indécomposables (c'est-à-dire qui ne se décomposent pas de façon non triviale en une somme directe de deux sous-représentations). Sa démonstration (par Tits) repose essentiellement sur l'étude (élémentaire) d'actions de groupes algébriques linéaires.

Références

- [1] D. J. Benson, *Representations and Cohomology I : Basic representation theory of finite groups and associative algebras*, Cambridge Univ. Press, 1991.
 - [2] P. Gabriel et A. V. Roiter, *Representations of finite-dimensional algebras*, Enc. of Math. Sci., 73, Algebra VIII, Springer 1992.
 - [3] J. P. Serre, *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, Benjamin, 1966. Traduit dans *Complex semisimple Lie algebras*, Springer, 1987.
-

Convolution libre et partitions non croisées

Thierry Lévy (levy@dma.ens.fr)

Connaissant les spectres de deux matrices hermitiennes, peut-on calculer le spectre de leur somme? Non, en général. Sauf si ces matrices sont aléatoires, très grandes et si leurs espaces propres sont en position générique, dans un sens à préciser. Dans ce cas, la distribution des valeurs propres de la somme s'obtient à partir de celles des matrices de départ par une opération sur les mesures analogue à la convolution, qu'on appelle convolution libre et qu'on note \boxplus . On peut aussi donner une définition algébrique de la convolution libre dans le cadre de la théorie des probabilités non-commutatives.

L'objet de ce mémoire est de d'étudier la convolution libre des mesures, en particulier ses aspects combinatoires. On s'intéressera aux cumulants libres d'une mesure μ , qui sont des nombres réels $k_n(\mu), n \geq 1$, qui linéarisent la convolution libre au sens où

$$\forall n \geq 1, k_n(\mu \boxplus \nu) = k_n(\mu) + k_n(\nu),$$

de même que les cumulants usuels linéarisent la convolution usuelle. L'expression combinatoire des cumulants libres d'une mesure en fonction de ses moments fait intervenir le treillis des partitions non-croisées d'un ensemble muni d'un ordre cyclique.

Références

- [1] R. Speicher, Notes d'un cours à l'IHP, disponibles à l'adresse <http://www.mast.queensu.ca/~speicher/papers/lectures-IHP.pdf>
- [2] G. Kreweras, *Sur les partitions non croisées d'un cycle*, Discrete Math. **1** (1972), no. 4, 333–350.

Factorisation des polynômes à coefficients rationnels

François Loeser (Francois.Loeser@ens.fr)

En 1992, Lenstra, Lenstra et Lovasz ont présenté le premier algorithme de factorisation des polynômes à coefficients rationnels en temps polynomial.

L'objectif du mémoire est de présenter l'ensemble des étapes de cet algorithme : passage par les corps finis (algorithme de Berlekamp), relèvement à l'aide du lemme de Hensel, et enfin l'étape finale due à Lenstra, Lenstra et Lovasz, qui repose sur un algorithme permettant de trouver des petits vecteurs dans un réseau.

Références

- [1] A. Lenstra, H. Lenstra et L. Lovasz, Factoring polynomials with rational coefficients, *Math. Ann.* **261**, 515-534 (1982).
- [2] J. von zur Gathen, J. Gerhard, *Modern computer algebra*, Cambridge University Press.

Clôture algébrique du corps $\mathbb{F}_q(t)$ et automates finis

François Loeser (Francois.Loeser@ens.fr)

En 1979 Gilles Christol a donné une condition nécessaire et suffisante en termes d'automates finis pour qu'une série formelle $\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i t^i$ à coefficients dans le corps fini \mathbb{F}_q soit algébrique sur le corps $\mathbb{F}_q(t)$. Cet énoncé a été étendu récemment par Kiran Kedlaya à des séries formelles plus générales, les séries de Hahn, qui sont indexées par des sous-ensembles bien ordonnés de \mathbb{Q} . Ceci a permis en particulier à Kedlaya de donner une description très explicite de la clôture algébrique du corps $\mathbb{F}_q(t)$.

Références

- [1] Gilles Christol, « Ensembles presque périodiques k -reconnaissables », *Theoret. Comput. Sci.*, **9** (1979), 141–145.
- [2] Gilles Christol, T. Kamae, M. Mendès France, G. Rauzy, « Suites algébriques, automates et substitutions », *Bull. Soc. Math. France* **108** (1980), 401–419.
- [3] Kiran Kedlaya, « Finite automata and algebraic extensions of function fields », disponible via <http://front.math.ucdavis.edu/math.AC/0410375>

Octonions

David Madore (`david.madore@ens.fr`)

Les nombres complexes \mathbb{C} sont la seule extension de corps non triviale de \mathbb{R} de dimension finie sur lui. Si on abandonne la condition de commutativité, il existe une autre algèbre à division de dimension finie sur \mathbb{R} , l'algèbre \mathbb{H} des quaternions de Hamilton. Enfin, si on remplace la condition d'associativité par celle, plus faible, d'alternativité ($x(xy) = (x^2)y$ et $(xy)y = x(y^2)$), il existe une dernière algèbre à divisions de dimension finie sur \mathbb{R} , l'algèbre \mathbb{O} des octonions ou octaves de Cayley. Le but de l'exposé est d'étudier quelques propriétés classiques des octonions, notamment de prouver le théorème de Zorn qui établit l'unicité de l'algèbre des octonions ([1]), et, éventuellement, de présenter quelques propriétés géométriques ou arithmétiques liées (par exemple décrire le plan projectif sur les octonions ou les octonions entiers).

Références

- [1] Heinz-Dieter Ebbinghaus & al., *Numbers*, Springer Graduate Texts in Mathematics 123 (RIM), partie B.
- [2] John H. Conway & Derek A. Smith, *On quaternions and octonions : their geometry, arithmetic, and symmetry*, A. K. Peters

Singularités des surfaces cubiques

David Madore (david.madore@ens.fr)

Les surfaces cubiques sont les surfaces définies dans l'espace (projectif) de dimension 3 par une équation de degré 3. Dans un célèbre mémoire de 1869 ([2]), Arthur Cayley a établi une classification de leurs singularités géométriques (par exemple, une surface cubique peut posséder jusqu'à quatre points doubles ordinaires). Le but de cet exposé est d'expliquer comment cette classification peut être redémontrée par des méthodes plus modernes ([1]). On pourra également étudier la classification des surfaces cubiques réelles.

Ce sujet se prête bien à de jolies représentations graphiques (par exemple [3]).

Références

- [1] James W. Bruce & Charles T. C. Wall, « On the classification of cubic surfaces », *J. London Math. Soc. (2)*, **19** (1979), 245–256.
- [2] Arthur Cayley, « Memoir on Cubic Surfaces », *Phil. Trans. R. Soc. London* **159** (1869), 231–326 (accessible sur <http://www.madore.org/~david/misc/cayley-cubic-surfaces.pdf>).
- [3] David Madore, DVD *Surfaces Cubiques*, <http://www.madore.org/cubic-dvd/>

Sur les graphes aléatoires

Philippe Marchal (marchal@dma.ens.fr)

Considérons n points et relient chaque paire de points par une arête avec probabilité c/n , ceci indépendamment pour chaque paire. On obtient ainsi un graphe aléatoire. On peut montrer que si $c < 1$, les composantes connexes sont toutes d'une taille $o(n)$ avec probabilité tendant vers 1 quand $n \rightarrow \infty$, alors que si $c > 1$, il existe une composante géante de taille $O(n)$. On peut aussi étudier ce qui se passe dans le cas critique, quand $c = 1$. Le but de cet exposé est d'étudier ces questions avec une méthodologie assez récente, qui consiste à extraire de ces composantes connexes des sous-arbres et à analyser un processus aléatoire (appelé surmartingale) lié à ces arbres.

Références

- [1] A. Nachmias et Y. Peres, *The critical random graph, with martingales*, [arXiv:math.PR/0512201](https://arxiv.org/abs/math.PR/0512201)

Inégalités fonctionnelles et ÉDPs

Stéphane Mischler et Clément Mouhot (mischler@ceremade.dauphine.fr & cmouhot@ceremade.dauphine.fr)

Cette première série de sujets s'inscrit dans l'esprit du cours d'Analyse Fonctionnelle et EDP. L'objectif commun à tous ces sujets est d'étudier une (famille d')inégalité(s) fonctionnelle (s) et ses (leurs) liens avec une (famille d')équation(s) aux dérivées partielles. À chaque fois, on s'intéressera à différentes preuves des inégalités fonctionnelles considérées : méthodes non constructives (compacité, application ouverte. . .), constructives (avec ou sans constante optimale). Le point de départ à chaque fois est le(s) article(s) donné(s) en bibliographie, mais le début du travail consistera (suivant l'intérêt de l'élève) à préciser l'objectif du mémoire et faire des recherches bibliographiques. Il s'agit donc de sujets dont le "niveau" dépendra de la demande des étudiants, et pour lesquels l'objectif serait de présenter une vue un peu synthétique des différentes preuves, des différentes problématiques autour des objets étudiés.

– **Inégalité de Sobolev Logarithmique et équations de diffusion non linéaires**

Bibliographie : Carrillo, McCann, Villani "Kinetic equilibration rates for granular media and related equations : Entropy dissipation and mass transportation estimates" Rev. Matematica Iberoamericana 19 (2003), 1-48. Livre de référence : Ané & co. "Sur les inégalités de Sobolev Logarithmiques", Panorama et Synthèses SMF (2000).

– **Inégalité de Hardy et état fondamental pour l'équation de Schrödinger**

Bibliographie : R. Bosi, J. Dolbeault, M. Esteban "Estimates for the optimal constants in multipolar Hardy inequality for Schrödinger and Dirac operators", prépublication 2006 <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00113158>

– **Inégalité de Korn en théorie cinétique des gaz**

Bibliographie : C. Villani, L. Desvillettes "On a variant of Korn's inequality arising in statistical mechanics. A tribute to J.-L. Lions", ESAIM Control Optim. Calc. Var. 8 (2002), 603-619.

– **Inégalité de Nash-Moser et équations paraboliques**

Bibliographie : J. Nash, "Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations", Amer. J. of Math., t. 80, 1958, p. 931- 954. C. B. Morrey "Second order elliptic equations in several variables and Hölder continuity", Math. Z., t. 72, 1959, p. 146-164. J. Moser "A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations", Comm. pure and appl. Math., t. 13, 1960, p. 457-468.

– **Quelle inégalité fonctionnelle implique l'ultracontractivité du semi-groupe de la chaleur ? et comment généraliser ?**

Bibliographie : O. Kavian, G. Kerkycharian, B. Roynette "Quelques remarques sur l'ultracontractivité", J. Functional Analysis, t. 111, 1993, p. 155-196. Livre de référence : Ané & co. "Sur les inégalités de Sobolev Logarithmiques", Panorama et Synthèses SMF (2000).

– **Théorème de De Rham, inégalité de Poincaré-Wirtinger, et équation de Stokes**

Bibliographie : J. Simon "Démonstration constructive d'un théorème de G. de Rham", C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., t. 316, 1993, p. 1167-1172. Plus généralement voir G. P. Galdi, "An introduction to the mathematical theory

of the Navier-Stokes equations. Vol. II. Nonlinear steady problems”, Springer, 1994.

Théorie spectrale et ÉDPs

Stéphane Mischler et Clément Mouhot (mischler@ceremade.dauphine.fr & cmouhot@ceremade.dauphine.fr)

Les opérateurs linéaires non-bornés sont un outil fondamental dans l’étude des ÉDPs linéaire, ou d’ÉDPs non-linéaires linéarisées au voisinage d’une solution stationnaire. L’idée générale des sujets qui suivent est l’étude de méthodes quantitatives en théorie spectrale.

Références générales : livres de Kato, Edmund-Evans, Reed & Simon, Henry, Pazy...

On partira des questions suivantes (qui peuvent donner lieu éventuellement à plusieurs sujets différents).

Quelles conditions mettre sur un opérateur pour avoir des estimations de décroissance explicite sur le semi-groupe? Le début du stage pourra débuter par un travail de bibliographie sur les opérateurs de contraction, sectoriels, etc. . Pour des cas plus généraux on pourra étudier les semi-groupes vérifiant la propriété de “spectral mapping” (il s’agit pour un opérateurs A de la propriété $\text{Sp}(e^{tA}) = e^{t\text{Sp}(A)}$) et le théorème de Gearhart-Prüss par exemple (et ses applications à des problèmes de stabilité pour l’équation des ondes) : L. Gearhart, “Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert spaces”, Trans. Amer. Math. Soc., t. 236, 1978, p. 385-394, J. Prüss, “On the spectrum of C^0 -semigroups”, Trans. Amer. Math. Soc., t. 284, 1984, p. 847-857, prépublication Cramer & Latushkin. .Peut-on donner une version constructive de leur théorème dans un cadre Hilbert ?

Une autre question liée est : Quelles conditions sur l’opérateur pour avoir une inégalité de type coercivité dans un cadre Hilbertien (cruciale pour les méthodes de type énergie en ÉDPs). Ce travail consistera en un travail de synthèse sur cette question : bibliographie sur les opérateurs auto-adjoints et le théorème spectral, les opérateurs dissipatifs, puis en cas de symétrie de l’opérateur l’existence d’extension(s) auto-adjointe(s) et leurs propriétés, puis éventuellement les résultats concernant l’image numérique d’un opérateurs, le pseudo-spectre. .

Étude d'apparition de singularités pour des ÉDPs de la mécanique des fluides

Stéphane Mischler et Clément Mouhot (mischler@ceremade.dauphine.fr &
cmouhot@ceremade.dauphine.fr)

– **Apparition de singularités pour les systèmes hyperboliques en mécanique des fluides**

Le but de ce sujet est de lire et comprendre le résultat important de Sideris (T. C. Sideris “Formation of singularities in three dimensional compressible fluids”, *Commun. math. phys.*, t. 101, 1985, p. 475-485) sur l’existence de singularités pour l’équation d’Euler compressible. On pourra poursuivre éventuellement avec différents articles qui utilisent l’approche de Sideris dans d’autres contextes, et avec le livre d’Alinhac “Blowup for nonlinear hyperbolic equations”, 1995, Birkhäuser Boston.

– **Autour d’un “problème du millénaire”...**

Le but de ce sujet est de comprendre quelques résultats existants concernant le problème ouvert sur la régularité ou apparition de singularité pour Navier-Stokes incompressible en dimension 3 : on partira du papier fondateur de Leray (“Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissant l’espace”, *Acta Math.*, t. 63, 1934, p. 193-248), puis on essaiera de comprendre le résultat clef de Caffarelli-Kohn-Nirenberg (L. Caffarelli, R. Kohn, and L. Nirenberg, “Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations”, *Comm. Pure Appl. Math.*, t. 35, 1982, p. 771-831), revisité par Fanghua Lin (“A new proof of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg Theorem”, *Commun. Pure Appl. Math.*, t. 51, 1998, p. 241-257).

Passage du microscopique au macroscopique

Stéphane Mischler et Clément Mouhot (mischler@ceremade.dauphine.fr & cmouhot@ceremade.dauphine.fr)

– Autour du 6^{ème} problème de Hilbert

Hilbert posait au congrès international de mathématiques de 1900 la question de savoir si on pouvait déduire rigoureusement les modèles macroscopiques de la mécanique des fluides à partir de modèles microscopiques sur les particules régis par les équations fondamentales de la dynamique. Il proposait alors d'utiliser comme étape intermédiaire (“mésoscopique”) l'équation de Boltzmann. Le but de ce sujet est de comprendre une avancée récente concernant ce problème : le passage dans certains cas de l'équation de Boltzmann aux équations de Navier-Stokes incompressibles. Le point de départ sera de lire et comprendre le programme “Bardos-Golse-Levermore” (“Fluid dynamical limits of kinetic equations, I : Formal derivation”, *J. Statist. Phys.*, t. 63, 1991, p. 323-344 et “Fluid dynamical limits of kinetic equations, II : Convergence proofs for the Boltzmann equation”, *Comm. Pure Appl. Math.*, t. 46, 1993, p. 667-753), en complétant éventuellement avec les articles qui ont poursuivis ce programme et en particulier le résultat récent F. Golse, L. Saint-Raymond “The Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation for bounded collision kernels”, *Invent. Math.*, t. 155, 2004, p. 81-161. Une référence introductive générale est C. Villani “Limites hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann”, séminaire Bourbaki 2001.

– Dérivation de modèles hydrodynamiques à partir de la physique statistique

Le but de ce sujet est de comprendre une autre approche du passage du microscopique au macroscopique, à partir de modèles stochastiques sur la dynamique des particules. Le point de départ sera l'article C. Morrey “On the derivation of the equation of hydrodynamics from statistical mechanics”, *Comm. Pure Appl. Math.*, t. 8, 1955, p. 279-326, et le livre C. Kipnis, C. Landim “Scaling limits of interacting particle systems”, Springer-Verlag, Berlin 1999. On poursuivra éventuellement sur l'étude du résultat récent J. Quastel, H.-T. Yau “Lattice gases, large deviations, and the incompressible Navier-Stokes equations”, *Ann. of Math.*, t. 148, 1998, p. 51-108, sur la dérivation des solutions de Leray à partir d'une dynamique stochastique sur un réseau.

L'arbre de Bruhat-Tits

Rachel Ollivier (`rachel.ollivier@ens.fr`)

On se propose de comprendre certains sous-groupes remarquables de $GL_1(\mathbb{Q}_p)$ et de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$.

Le groupe \mathbb{Q}_p^* contient le sous-groupe $1+p\mathbb{Z}_p$ ([1], [2]). Grâce à cette observation, on classe sans peine les caractères localement constants de \mathbb{Q}_p^* à valeurs dans un corps de caractéristique p .

Pour étudier le groupe $GL_2(\mathbb{Q}_p)$, on peut regarder comment il agit sur les réseaux de \mathbb{Q}_p^2 et illustrer cette action *via* l'arbre de Bruhat-Tits. Des sous-groupes remarquables de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ apparaissent alors de façon naturelle comme stabilisateurs de sommets, d'arêtes (etc.) de l'arbre ([3]). On cherchera à comprendre ce que l'on peut dire, grâce à ces sous-groupes, des représentations de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ à coefficients dans un corps de caractéristique p .

Références

- [1] Amice, Yvette Les nombres p -adiques. Presses Universitaires de France, Paris, 1975.
 - [2] Serre, Jean-Pierre. Cours d'arithmétique. Presses Universitaires de France, Paris, 1977.
 - [3] Serre, Jean-Pierre. Arbres, amalgames, SL_2 . Astérisque, No. 46. Société Mathématique de France, Paris, 1977.
-

Sur le groupe de l'icosaèdre

Frédéric Paulin (frederic.paulin@ens.fr)

Le groupe de l'icosaèdre est un très joli groupe fini simple. Le but de cet exposé est de décrire sa structure, ainsi que celle du groupe binaire icosaédral via les quaternions, et d'étudier ses relations avec des problèmes de résolution d'équations polynomiales du cinquième degré et le développement en fraction continue de Rogers-Ramanujan.

Références

- [DM] P. Doyle, C. McMullen, *Solving the quintic by iteration*, Acta Math. **163** (1989) 151–180.
- [Duk] W. Duke, *Continued fractions and modular functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **42** (2005) 137–162 .
- [Kle] F. Klein, *Lectures on the icosaedron*, Dover, 1956.
- [Vig] M. F. Vigneras, *Arithmétique des algèbres de quaternion*, Lect. Notes **800**, Springer Verlag, 1980.

Itération de Pappus et groupe modulaire

Frédéric Paulin (frederic.paulin@ens.fr)

Le théorème de Pappus, partant de deux triplets de points chacun situés sur une droite, fournit un nouveau triplet de points situés sur une droite, et ainsi se prête à l'itération. Le but de l'exposé est d'étudier le système dynamique ainsi obtenu, qui fournit, et se comprend par, de jolis morphismes du groupe modulaire $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{R})$, et apporte une pierre de plus aux relations entre le groupe modulaire et le noeud de trèfle.

Références

- [GL] E. Ghys, J. Leys, *Lorenz and modular flow : a visual introduction*, Feature Column, AMS, Novembre 2006.
<http://www.ams.org/featurecolumn/archive/lorenz.html>
- [Sch] R. E. Schwartz, *Pappus's theorem and the modular group*, Pub. Math. IHES **78** (1993) 187-206.

Théorie de l'approximation et analyse hilbertienne

Benoît Perthame (Benoit.Perthame@ens.fr)

Les polynômes orthogonaux fournissent bien entendu un exemple élémentaire de base hilbertienne de L^2 et aussi d'approximation des fonctions par des polynômes. Ils vérifient également des propriétés remarquables dont les utilisations sont surprenantes. La théorie de Gauss par exemple montre que leurs racines sont les meilleurs points pour réaliser l'approximation d'une intégrale dans une théorie L^2 . Il suffira de programmer quelques exemples simples pour se convaincre que ce sont des théories simples, constructives et efficaces.

L'approximation par des polynômes dans C^0 est bien moins agréable. Même si le théorème de Stone-Weierstrass indique que l'approximation est possible, la réaliser en pratique est difficile. Le théorème de Banach-Steinhaus montre d'ailleurs les limites d'une approximation linéaire.

Références

- [1] M. Crouzeix et A. Mignot, *Analyse numérique des équations différentielles*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1986.
- [2] J.-P. Demailly, *Analyse numérique*. Presses Universitaires de Grenoble.

La simulation “parfaite”

Christian Robert (xian@ceremade.dauphine.fr)

Pour la simulation par ordinateur de distributions non-standards, il est souvent impossible de produire des simulateurs reproduisant la situation de variables iid et l'on doit se contenter de simulateurs corrélés produisant une chaîne de Markov dont la loi stationnaire est la loi à simuler. Il existe cependant une technique permettant de recycler ces simulations moins efficaces en des simulations iid, technique qui a pris le nom de simulation “parfaite” pour signifier son caractère non-approximatif. Le projet de recherche viserait à comparer les temps de calcul de ces méthodes “parfaites” à ceux des simulateurs corrélés sur lesquels elles sont fondées, après correction de la corrélation par la technique de l’“effective sample size”. Une implémentation sur machine de cette comparaison est bien entendu souhaitable.

Références

- [1] <http://dbwilson.com/exact/>
- [2] G. Casella, M. Lavine et C.P. Robert, *Explaining the perfect sampler*, The American Statistician, 55(4), 2001, 299 – 305.
- [3] J.S. Liu, *Monte Carlo Strategies in Scientific Computing*, Springer Verlag, New York, 2001.
- [4] C.P. Robert et G. Casella, *Monte Carlo Statistical Methods*, Springer Verlag, New York, 2004.
- [5] E. Thonnes, *A Primer in Perfect Simulation*, Statistical Physics and Spatial Statistic, ed. Klaus R. Mecke and D. Stoyan, Springer Lecture Notes in Physics, 2000, 349 – 378.

Algèbres de Temperley-Lieb

Marc Rosso (rosso@dma.ens.fr)

Ces algèbres remarquables sont apparues de manière indépendante dans des domaines très variés : tout d’abord dans les travaux de Temperley et Lieb sur des modèles de physique statistique, puis dans ceux de V. Jones en algèbres d’opérateurs, ou encore dans la théorie des représentations du groupe quantique associé à $SU(2)$. On pourra s’intéresser à certaines (voire toutes) de ces motivations, étudier la structure de ces algèbres et éventuellement leur lien avec le polynôme de Jones (invariant des entrelacs).

Ondes de surface

Eric Séré (sere@ceremade.dauphine.fr)

L'étude des ondes se propageant sans déformation à la surface d'un fluide est un problème classique en analyse non linéaire, qui est d'un grand intérêt pratique (par exemple pour la modélisation des tsunamis). On propose de s'intéresser à l'existence d'ondes périodiques et solitaires de grande amplitude. Les outils mathématiques seront principalement la théorie des bifurcations et le principe du maximum.

Références

- [1] J.F. Toland, *Stokes waves*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, 7(1) and 8(2), (1996 and 1997), 1–48 and 413–414.
- [2] W. Craig, *Surface water waves and tsunamis*, J. Dynamics and Differential Equations (2006).
- [3] W. Craig, *Mathematical aspects of surface water waves*, Workshop on mathematical hydrodynamics, Steklov Institute Moscow June 2006.

(les deux derniers papiers sont accessibles sur la page web de Walter Craig, <http://www.math.mcmaster.ca/craig/index.html>)

Orbites homoclines et comportement chaotique en mécanique classique

Eric Séré (sere@ceremade.dauphine.fr)

Les orbites homoclines ont été introduites par Poincaré dans l'étude de certains systèmes mécaniques il y a plus d'un siècle. Depuis, elles se sont révélées un outil fondamental dans l'étude du chaos. On propose d'étudier la dynamique au voisinage d'une orbite homocline. On construira notamment le fameux "fer à cheval de Smale".

Références

- [1] I. Ekeland, *Le calcul, l'imprévu : les figures du temps de Kepler à Thom*, Paris : Seuil , 1984.
 - [2] J. Moser, *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*, Princeton University Press.
-

Les chorégraphies

Eric Séré (sere@ceremade.dauphine.fr)

On s'intéresse ici à n masses ponctuelles en interaction gravitationnelle. Ces dernières années, une nouvelle classe de mouvements périodiques a été découverte, les "chorégraphies". Au cours d'une chorégraphie, les masses se suivent sur une même courbe du plan ou de l'espace. On s'intéressera à des travaux récents prouvant l'existence de certaines chorégraphies, grâce au calcul des variations.

Références

- [1] Consulter <http://www.soe.ucsc.edu/~charlie/3body/> pour une animation et des références.
-

Estimation de densité

Gilles Stoltz (`stoltz@dma.ens.fr`)

Le champ de la statistique est l'estimation des lois sous-jacentes de certains phénomènes. Selon la quantité d'information requise par le commanditaire de l'étude, il s'agit d'accéder à des quantités plus ou moins aisées à observer et à estimer. On dispose par exemple de nombreuses procédures pour la moyenne (ou tout autre moment) de la loi sous-jacente. On peut les appliquer pour estimer la probabilité moyenne d'un événement donné. Plus difficile est l'estimation simultanée de la probabilité de plusieurs événements, voire de tous les événements mesurables. Elle requiert essentiellement la connaissance de la densité. Une connaissance aussi profonde (parce que caractéristique) de la loi conduit à de nombreuses applications, en reconnaissance de formes notamment.

Formellement, la position du problème d'estimation de densité est la suivante. On dispose d'un n -échantillon $X_1^n = (X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi μ (sur \mathbb{R} , pour simplifier). On suppose que cette loi μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ , de densité f . Le but est d'estimer f ; on verra ensemble quelles applications nous conduisent à requérir cela. On notera dans la suite $\hat{f}_n = \hat{f}_n(\cdot, X_1^n)$ un tel estimateur. Pour juger de la qualité d'un estimateur, il nous faut définir sa proximité à la vraie densité et trouver un bon critère (par exemple, une distance). La densité f de μ étant caractérisée par le fait que pour tout ensemble A borélien,

$$\mu(A) = \int_A f \, d\lambda,$$

on requiert donc que pour tout A borélien,

$$\int_A f \, d\lambda \quad \text{et} \quad \int_A \hat{f}_n \, d\lambda$$

soient proches. Cela est mesuré par la distance en variation (où le supremum est pris sur tous les boréliens), qui se trouve ici être égale à la moitié de la distance \mathbb{L}^1 ,

$$\sup_A \left| \mu(A) - \int_A \hat{f}_n \, d\lambda \right| = \frac{1}{2} \int |f - \hat{f}_n| \, d\lambda.$$

On appelle souvent cette quantité le risque de \hat{f}_n (contre f).

Contrairement aux notions de mesure ou de fonction de répartition, qui admettent des expressions empiriques canoniques avec de bonnes propriétés, il n'existe pas de telle définition universellement admise de densité empirique. Par exemple, la mesure empirique μ_n n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et sa distance en variation à f (à μ) est 1. Il est nécessaire que la mesure empirique (non canonique) $\hat{\mu}_n$ à qui l'on compare μ ait elle-même une densité \hat{f}_n .

Le but de cet exposé de maîtrise sera d'étudier différentes classes d'estimateurs de densités (de manière théorique mais aussi par simulation selon votre désir) et de développer peut-être une ou deux applications. Les références sont essentiellement les trois livres suivants (ceux qui ne sont pas disponibles à la bibliothèque sont en commande). Notez que le troisième ouvrage emploie des méthodes combinatoires.

Références

- [1] L. Devroye, *A Course in Density Estimation*. Birkhäuser, 1987.
- [2] L. Devroye et L. Györfi, *Nonparametric Density Estimation. The \mathbb{L}^1 View*. Wiley, 1985.
- [3] L. Devroye et G. Lugosi, *Combinatorial Methods in Density Estimation*. Springer, 2000.

Paramètre critique pour le modèle de FK-percolation

Marie Théret (theret@dma.ens.fr)

Le modèle de FK-percolation a été introduit par Fortuin et Kasteleyn en 1969 pour unifier différents modèles de physique statistique. Dans le modèle de percolation, on considère un graphe duquel on retire aléatoirement certaines arêtes. Ici, la probabilité d'une configuration ainsi obtenue est pondérée par le nombre de composantes connexes du graphe aléatoire produit.

Le but de l'exposé est d'abord de comprendre le modèle de FK-percolation, ainsi que (si le temps le permet) son lien avec le modèle d'Ising (modélisant les métaux ferromagnétiques), et l'existence d'une transition de phase dans ce modèle. Ensuite, on se placera en dimension 2 pour montrer quelques propriétés du point critique. Les outils utilisés sont entre autres la notion de domination stochastique entre mesures, et la dualité en dimension 2.

Références

- [1] G. Grimmett, *The random-cluster model*

Zéros d'une fonction analytique aléatoire

Mathilde Weill (weill@dma.ens.fr)

L'objet de ce mémoire est d'étudier la partie aléatoire du disque unité de \mathbb{C} que forment les zéros d'une fonction analytique aléatoire.

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables gaussiennes complexes standard indépendantes. La série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ définit une fonction analytique aléatoire $f(z)$ dans le disque unité \mathbb{D} du plan complexe. Y. Peres et B. Virág ont montré que l'ensemble des zéros de cette fonction est un processus ponctuel déterminantal, ce qui signifie que c'est une partie aléatoire de \mathbb{D} satisfaisant la propriété suivante :

- il existe une fonction $K : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que, pour tous $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$, la probabilité $p_\epsilon(z_1, \dots, z_n)$ que la fonction f admette au moins un zéro dans chacun des disques de rayon ϵ et centrés en z_1, \dots, z_n , vérifie

$$p_\epsilon(z_1, \dots, z_n) \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\sim} \epsilon^{2n} \det [(K(z_i, z_j))_{i,j=1 \dots n}].$$

Les processus déterminantaux apparaissent dans des domaines assez variés des probabilités (spectre des grandes matrices aléatoires, arbres couvrants aléatoires d'un graphe) mais l'exemple de Peres et Virág est le premier de son type.

Références

- [1] Y. Peres et B. Virág, *Zeros of the i.i.d. Gaussian power series : a conformally invariant determinantal process*, (2005), arXiv:math.PR/0310297.

Marches aléatoires disjointes, effacement de boucles et déterminants

Wendelin Werner (wwmath@gmail.com)

Le but de cet exposé est de comprendre et de relier les objets et résultats suivants :

- Les probabilités de non-intersection entre marches aléatoires en dimension 1 s'expriment sous forme d'un déterminant (par simple généralisation d'un principe de réflexion).
- Le lien entre mesures uniformes sur les arbres couvrant un graphe donné et les marches aléatoires à boucles effacées (ce lien est appelé "algorithme de Wilson")
- La probabilité pour que de longues branches disjointes existent sur un arbre choisi uniformément au hasard s'exprime sous forme d'un déterminant de probabilités de transition (ce résultat est appelé l'identité de Fomin).

Cet exposé se situe à la limite entre combinatoire et probabilités. Il s'agit de résultats relativement récents (l'identité de Fomin date de 2001).