Processus Stochastiques
ENS Paris, 2021-2022

Rémy Mahfouf
Bureau V2
remy.mahfouf@ens.fr

TD 0 : Révisions

Vendredi 10 Septembre

Exercice 1

1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. réelles qui converge en loi vers une constante déterministe a.
   (a) Montrez que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers a.
   (b) Soit $(b_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels. Montrez que la suite $(X_n + b_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une constante déterministe si et seulement si la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ converge vers une limite finie.

2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. réelles indépendantes de même loi de densité

$$f(x) = C\frac{|x|}{(1+x^2)^3}, \tag{1}$$

   où C est une constante. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n := X_1 + \cdots + X_n$.
   (a) Déterminez C.
   (b) Montrez que, si $\alpha > 1/2$, alors S_n/n^α converge en probabilité vers 0.
   (c) Que peut-on dire dans le cas $0 < \alpha < 1/2$?

Solution de l'exercice 1

1. (a) C'est dans votre cours.
   (b) Pour le sens direct, supposons $X_n + b_n \to a + b$ en loi avec $b \in \mathbb{R}$. On a aussi convergence en probabilité. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $|b_n - b| > \varepsilon$, on a

$$\mathbb{P}(|X_n + b_n - a - b| > \frac{\varepsilon}{2}) \geq \mathbb{P}(|X_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

   Mais pour n grand la partie de gauche est proche de 0 et celle de droite est proche de 1, donc l'inégalité est fausse à partir d'un certain rang. Donc $|b_n - b| \leq \varepsilon$ à partir d'un certain rang. On a montré que $b_n \to b$.
   Pour la réciproque, on peut passer par les fonctions caractéristiques par exemple.

2. (a) On calcule

$$C^{-1} = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 2\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^3}dx = 2\left[\frac{-1}{4(1+x^2)^2}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}$$

   donc $C = 2$.

(b) Soit $\varepsilon > 0$, on a (en utilisant l'inégalité de Markov),

$$\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n^\alpha}| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(S_n^2 \geq \varepsilon^2 n^{2\alpha}) \leq \frac{\mathbb{E}[S_n^2]}{\varepsilon^2 n^{2\alpha}}.$$

Comme les X_i sont i.i.d. centrées, on a $\mathbb{E}[S_n^2] = n\mathbb{E}[X_1^2]$ et comme $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$ ça permet de conclure.

(c) Par le théorème central limite, on sait que $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, avec $\sigma^2 := \mathbb{E}[X_1^2]$. Avec ça on peut en déduire que pour tout $a > 0$, $\mathbb{P}(S_n/n^\alpha \in [-a, a]) \to 0$ et cela montre que S_n/n^α ne converge pas en loi car la suite n'est pas tendue (donc pas en probabilité ni presque sûrement ou L^1).

Exercice 2 Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et de loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour $n \geq 1$, on pose

$$M_n := \max\left(\frac{1}{\sqrt{U_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{U_n}}\right). \tag{2}$$

1. Calculer la fonction de répartition de M_n.
2. Soit $p > 0$. Déterminer les valeurs de p telles que M_n a un moment d'ordre p fini.
3. Montrer que $M_n/\sqrt{n}$ converge en loi quand $n \to \infty$ vers une variable aléatoire dont on précisera la fonction de répartition et la densité.

Solution de l'exercice 2

1. Pour $x < 1$, on a $F_{M_n}(x) = 0$. Pour $x \geq 1$, on a

$$F_{M_n}(x) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{U_1}} \leq x\right)^n = \mathbb{P}\left(U_1 \geq \frac{1}{x^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^n.$$

2. Comme $M_n \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}\left[M_n^p\right] = \int_0^\infty \mathbb{P}\left(M_n^p \geq y\right) dy = \int_0^\infty \mathbb{P}\left(M_n \geq y^{1/p}\right) dy.$$

Or on a , pour $y \geq 1$,

$$\mathbb{P}\left(M_n \geq y^{1/p}\right) = 1 - F_{M_n}(y^{1/p}) = 1 - \left(1 - \frac{1}{y^{2/p}}\right)^n \sim_{y\to\infty} \frac{n}{y^{2/p}},$$

donc $\mathbb{E}[M_n^p] < \infty$ si et seulement si $p < 2$.

3. On passe par les fonctions de répartition. Pour $x \leq 0$, on a $F_{M_n/\sqrt{n}}(x) = 0$. Pour $x > 0$, on a, à partir d'un certain rang tel que $x\sqrt{n} \geq 1$,

$$F_{M_n/\sqrt{n}}(x) = F_{M_n}(x\sqrt{n}) = \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n \underset{\infty}{\to} e^{-1/x^2}.$$

On pose $F(x) := e^{-1/x^2}1_{x>0}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Alors F est continue croissante et tend vers 0 en $-\infty$ et en 1 en $+\infty$ donc c'est la fonction de répartition d'une variable aléatoire Z, et donc $M_n/\sqrt{n}$ converge en loi vers Z.

En outre, on a $F_Z(x) = \int_{-\infty}^x p_Z(z)dz$, avec

$$p_Z(z) := F_Z'(z) = 1_{z>0}\frac{2}{z^3}e^{-1/z^2},$$

donc Z admet p pour densité.

Exercice 3 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement ditribuées définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que $X_1 \in L^2(\mathbb{P})$, $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathbb{E}[X_1^2] = \sigma^2 < \infty$. On fixe un réel $\alpha > 0$ et, pour $n \geq 1$, on pose

$$S_n^{(\alpha)} := \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{i^\alpha}.$$

1. On suppose que $\alpha > 1/2$. Montrer que $(S_n^{(\alpha)})_{n\geq 1}$ converge dans L^2.

   Indication. On pourra utiliser le critère de Cauchy.

2. On suppose maintenant que $\alpha = 1/2$.

   (a) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $\xi \in [-\eta, \eta]$, on ait

   $$|\phi_{X_1}(\xi) \exp\left(\frac{\sigma^2 \xi^2}{2}\right) - 1| \leq \varepsilon \xi^2.$$

   (b) En déduire que la suite

   $$\left(\frac{S_n^{(1/2)}}{\sqrt{\ln n}}\right)_{n\geq 1}$$

   converge en loi vers une limite dont on précisera la loi.

Solution de l'exercice 3

1. On utilise le critère de Cauchy : soit $1 \leq m \leq n$, on a

   $$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=m}^n \frac{X_i}{i^\alpha}\right)^2\right] = \sum_{i=m}^n \mathbb{E}\left[\left(\frac{X_i}{i^\alpha}\right)^2\right] = \sigma^2 \sum_{i=m}^n \frac{1}{i^{2\alpha}},$$

   en utilisant l'indépendance et le fait que les X_i sont centrées. Pour $\alpha > 1/2$, la série $\sum_{i\geq 1} i^{-2\alpha}$ converge donc

   $$\sup_{n\geq m\geq N} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=m}^n \frac{X_i}{i^\alpha}\right)^2\right] \xrightarrow[N\to\infty]{} 0,$$

   ce qui montre que $(S_n^{(\alpha)})_{n\geq 1}$ converge dans L^2 (car L^2 est complet).

2. Pour cette question, on utilise une méthode similaire à la démonstration du TCL.

   (a) On sait que X_1 admet un moment d'ordre 2, donc ϕ_{X_1} est 2 fois dérivable en 0 et $\phi'_{X_1}(0) = i\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\phi''_{X_1}(0) = -\mathbb{E}[X_1^2] = -\sigma^2$. Avec un développement de Taylor-Young en 0, on obtient

   $$\phi_{X_1}(\xi) = 1 - \frac{\sigma^2\xi^2}{2} + o(\xi^2) = \exp\left(-\frac{\sigma^2\xi^2}{2}\right)\left(1 + o(\xi^2)\right),$$

   quand $\xi \to 0$. Cela correspond au résultat demandé.

   (b) Soit $\xi \in \mathbb{R}$ fixé dans la suite, on a

   $$\phi_{S_n^{(1/2)}/\sqrt{\ln n}}(\xi) = \mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{k=1}^n \frac{X_k \xi}{k^{1/2}\sqrt{\ln n}}\right)\right] = \prod_{k=1}^n \phi_{X_1}\left(\frac{\xi}{\sqrt{k \ln n}}\right).$$

On écrit

$$\phi_{S_n^{(1/2)}/\sqrt{\ln n}}(\xi)\exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{\sigma^2\xi^2}{2k\ln n}\right) = \prod_{k=1}^n \phi_{X_1}\left(\frac{\xi}{\sqrt{k\ln n}}\right)\exp\left(\frac{\sigma^2\xi^2}{2k\ln n}\right)$$
$$= \prod_{k=1}^n (1+z_{k,n}), \quad \text{avec} \quad z_{k,n} := \phi_{X_1}\left(\frac{\xi}{\sqrt{k\ln n}}\right)\exp\left(\frac{\sigma^2\xi^2}{2k\ln n}\right)$$

Montrons que $\prod_{k=1}^n(1+z_{k,n}) \to 1$. Pour cela, soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ donné par la question précédente. Pour n suffisamment grand tel que $|\xi/\sqrt{\ln n}| \leq \eta$, on a $|\xi/\sqrt{k\ln n}| \leq \eta$ pour tout $k \geq 1$ et donc $|z_{k,n}| \leq \varepsilon\xi^2/(k\ln n)$. En développant le produit, en appliquant l'inégalité triangulaire puis en refactorisant le produit on a

$$|\prod_{k=1}^n(1+z_{k,n}) - 1| \leq \prod_{k=1}^n(1+|z_{k,n}|) - 1 = \exp\left(\sum_{k=1}^n \ln(1+|z_{k,n}|)\right) - 1.$$

Comme $\ln(1+x) \leq x$ pour $x \geq 0$, on en déduit

$$|\prod_{k=1}^n(1+z_{k,n}) - 1| \leq \exp\left(\sum_{k=1}^n |z_{k,n}|\right) - 1 \leq \exp\left(\frac{\varepsilon\xi^2}{\ln n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) - 1.$$

On a donc

$$\limsup_{n\to\infty} |\prod_{k=1}^n(1+z_{k,n}) - 1| \leq \mathrm{e}^{\varepsilon\xi^2} - 1,$$

qui est aussi petit que l'on veut pour ε petit. Donc $\prod_{k=1}^n(1+z_{k,n}) \to 1$ et ainsi

$$\phi_{S_n^{(1/2)}/\sqrt{\ln n}}(\xi)\exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{\sigma^2\xi^2}{2k\ln n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Mais, d'autre part, on a $\exp(\sum_{k=1}^n \frac{\sigma^2\xi^2}{2k\ln n}) \to \exp(\sigma^2\xi^2/2)$, donc finalement

$$\phi_{S_n^{(1/2)}/\sqrt{\ln n}}(\xi) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2/2}.$$

Par le théorème de Lévy faible, cela montre que $S_n^{(1/2)}/\sqrt{\log n}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$.

Remarque. Dans la solution ci-dessus, on se passe du logarithme complexe, qui n'a pas encore été vu en cours. Son utilisation rendrait le calcul plus naturel, même si elle oblige à vérifier que l'on est bien sur son domaine de définition.

Exercice 4 Rappelons la formule de Stirling: $n! \sim (n/e)^n\sqrt{2\pi n}$ quand $n \to \infty$. Soient $p \in]0,1[$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = 1-p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = 1) = p.$$

Pour $n \geq 1$, posons $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ et définissons

$$U := \liminf_{n\to\infty} S_n \quad \text{et} \quad V := \limsup_{n\to\infty} S_n.$$

1. Quelle est la loi de S_n? Donnez son espérance et sa variance.

2. (a) Donnez un équivalent de $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$ lorsque n tend vers l'infini.

(b) Dans le cas non symétrique où $p \neq 1/2$, en déduire que, presque sûrement, la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ ne visite 0 qu'un nombre fini de fois.

3. Montrez que V est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

4. (a) L'événement $\{V \leq 100\}$ est-il un événement asymptotique pour la suite $(X_n)_{n\geq 1}$?
   (b) Montrez que $\mathbb{P}(V = +\infty)$ vaut 0 ou 1.

5. (a) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Que vaut $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n = k)$? Montrez que, pour tout $a \geq 0$,

$$\mathbb{P}(|S_n| \leq a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

   (b) En déduire que $\mathbb{P}(\exists a > 0 : \forall n \geq 1, |S_n| \leq a) = 0$.

6. Montrez alors que, pour tout $b > 0$, $\mathbb{P}(-b \leq U \leq V \leq b) = 0$.

7. Conclure finalement que exactement l'une des 3 probabilités suivantes vaut 1:

$$\mathbb{P}(U = V = +\infty), \quad \mathbb{P}(U = V = -\infty), \quad \mathbb{P}(U = -\infty, V = +\infty),$$

et préciser laquelle selon la valeur de p.

8. Dans le cas symétrique $p = 1/2$, montrez que, avec probabilité 1, la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ visite 0 un nombre infini de fois.

Solution de l'exercice 4

1. La loi de S_n est donnée par

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \begin{cases} \binom{n}{(n+k)/2} p^{(n+k)/2}(1-p)^{(n-k)/2} & \text{si } \frac{n+k}{2} \in [0, n], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a $\mathbb{E}[S_n] = n\mathbb{E}[X_1] = n(2p-1)$ et, par indépendance, $Var(S_n) = nVar(X_1) = 4np(1-p)$.

2. (a) Avec la formule de Stirling, on obtient

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} p^n(1-p)^n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}(4p(1-p))^n.$$

   (b) Si $p \neq 1/2$, on a $4p(1-p) < 1$ donc $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(S_{2n} = 0) < \infty$ donc, par Borel-Cantelli, presque sûrement, la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ ne visite 0 qu'un nombre fini de fois.

3. C'est un résultat du tout début du cours : une $\limsup$ de fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ reste mesurable.

4. (a) Non.
   (b) On vérifie que $\{V = +\infty\}$ est un événement asymptotique, puis on applique la loi du 0-1.

5. (a) Pour $k \in \mathbb{Z}$, on a $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n = k) = 0$ à partir de l'expression explicite. Puis, pour tout $a \geq 0$,

$$\mathbb{P}(|S_n| \leq a) = \sum_{k=-a}^{a} \mathbb{P}(S_n = k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(b) On a, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\forall n \geq 1, |S_n| \leq a) \leq \mathbb{P}(|S_m| \leq a)$. En faisant tendre $m \to \infty$, on en déduit $\mathbb{P}(\forall n \geq 1, |S_n| \leq a) = 0$. Puis

$$\mathbb{P}(\exists a > 0 : \forall n \geq 1, |S_n| \leq a) = 0,$$

en tant que réunion dénombrable d'événements de probabilité nulle.

6. Soit $b > 0$. Si $-b \leq U \leq V \leq b$, alors la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée donc il existe $a > 0$ tel que $\forall n \geq 1, |S_n| \leq a$, ce qui est de probabilité nulle.

7. Par la question 6., on sait que U et V sont à valeurs dans $\{-\infty, +\infty\}$ p.s. et par la question 4.(b) (qui est vraie pour U aussi), on sait que chacun est soit p.s. constant égal à $+\infty$, soit p.s. constant égal à $-\infty$. Cela montre que l'une des trois probabilités de l'énoncé vaut 1.

   Si $p > 1/2$, par la loi forte des grands nombres, $S_n/n \to 2p - 1 > 0$ p.s. et donc $S_n \to \infty$ p.s. ce qui est équivalent à
$$\mathbb{P}(U = V = +\infty) = 1.$$
   Par symétrie, si $p < 1/2$, on a
$$\mathbb{P}(U = V = -\infty) = 1.$$
   Finalement, supposons $p = 1/2$. Si on avait $\mathbb{P}(U = V = +\infty) = 1$ alors par symétrie on aurait aussi $\mathbb{P}(U = V = -\infty) = 1$ ce qui est absurde. Donc
$$\mathbb{P}(U = -\infty, V = +\infty) = 1.$$

8. Sur l'événement $\{U = -\infty, V = +\infty\}$, on peut construire une extractrice φ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{\varphi(2n)} > 0$ et $S_{\varphi(2n+1)} < 0$. Alors entre $\varphi(2n)$ et $\varphi(2n+1)$, il y a un passage en zéro de la marche. Il y en a donc une infinité sur cet événement, qui est de probabilité 1.

Exercice 5 Soit $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note N le nombre de retours en 0 de la marche avant l'instant $2n$ inclus : $N := \#\{k \in [1, n] : S_{2k} = 0\}$.

1. Soit $r \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{P}(N = r) = \mathbb{P}(N \geq r, S_{2n} = 0)$.

   Rappel. Pour $n \geq 0$, $\mathbb{P}(S_1 \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$.

2. Notons T_i est l'instant du i^{e} retour en 0, pour $i \geq 1$. Soit $r \in [0, n]$. Montrer que
$$\mathbb{P}(N = r) = \sum_{i=r}^{n} \mathbb{P}(T_i = 2n).$$

3. Soit $r \in [0, n]$. Montrer que
$$\mathbb{P}(N = r) = \frac{1}{2^{2n-r}} \binom{2n-r}{n-r}.$$
   Rappel. Pour $n \geq i$, on a
$$\mathbb{P}(T_i = 2n) = \frac{i}{2^{2n-i}(2n-i)} \binom{2n-i}{n-i}.$$

<u>*Solution de l'exercice 5*</u>

1. On note T_r l'instant du r^{e} retour en 0, qui est bien défini dès que $N \geq r$ et qui est pair et inférieur à $2n$. Donc on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N = r) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T_r = 2k, N = r) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T_r = 2k, S_{2k+1} \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(T_r = 2k, \tilde{S}_1^{(2k)} \neq 0, \ldots, \tilde{S}_{2n-2k}^{(2k)} \neq 0\right),\end{aligned}$$

où $\tilde{S}_i^{(2k)} := S_{2k+i} - S_{2k} = \sum_{j=1}^{i} X_{2k+j}$. On a $\{T_r = 2k\} \in \sigma(X_j, j \leq 2k)$ et $\{\tilde{S}_1^{(2k)} \neq 0, \ldots, \tilde{S}_{2n-2k}^{(2k)} \neq 0\} \in \sigma(X_j, 2k+1 \leq j \leq 2n)$, donc ces événements sont indépendants, donc

$$\mathbb{P}(N = r) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T_r = 2k)\, \mathbb{P}\left(\tilde{S}_1^{(2k)} \neq 0, \ldots, \tilde{S}_{2n-2k}^{(2k)} \neq 0\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T_r = 2k)\, \mathbb{P}\left(\tilde{S}_{2n-2k}^{(2k)} = 0\right),$$

par le lemme fondamental appliqué à la marche $\tilde{S}^{(2k)}$. En utilisant de nouveau l'indépendance, on obtient alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N = r) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(T_r = 2k, \tilde{S}_{2n-2k}^{(2k)} = 0\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T_r = 2k, S_{2n} = 0) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T_r = 2k, N \geq r, S_{2n} = 0) = \mathbb{P}(N \geq r, S_{2n} = 0),\end{aligned}$$

où l'on peut rajouter $N \geq r$ car $T_r = 2k \Rightarrow N \geq r$, puis où l'on utilise que $N \geq r \Rightarrow T_r \leq 2n$ pour se débarasser de la somme.

2. On remarque que $N \leq n$ et donc, en utilisant la question précédente, on a

$$\mathbb{P}(N = r) = \sum_{i=r}^{n} \mathbb{P}(N = i, S_{2n} = 0) = \sum_{i=r}^{n} \mathbb{P}(T_i = 2n).$$

3. Avec la loi du r^{e} retour en 0, la question précédente donne

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N = r) &= \sum_{i=r}^{n} \frac{i}{2^{2n-i}(2n-i)} \binom{2n-i}{n-i} = \sum_{i=r}^{n} \frac{1}{2^{2n-i}} \left(1 - \frac{2(n-i)}{2n-i}\right) \binom{2n-i}{n-i} \\ &= \sum_{i=r}^{n} \frac{1}{2^{2n-i}} \binom{2n-i}{n-i} - \sum_{i=r}^{n} \frac{1}{2^{2n-i}} \frac{2(n-i)}{2n-i} \binom{2n-i}{n-i} \\ &= \sum_{i=r}^{n} \frac{1}{2^{2n-i}} \binom{2n-i}{n-i} - \sum_{i=r}^{n-1} \frac{1}{2^{2n-i-1}} \binom{2n-i-1}{n-i-1} = \frac{1}{2^{2n-r}} \binom{2n-r}{n},\end{aligned}$$

car les deux sommes se télescopent.

Exercice 6 Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites indépendantes de v.a. réelles indépendantes de loi normale centrée réduite. Posons

$$\forall n \geq 1, \quad Z_n := \sqrt{X_n^2 + Y_n^2}.$$

1. Quelle est la loi de Z_n pour $n \geq 1$?

2. Montrez que $(Z_1 + \cdots + Z_n)/n$ converge en probabilité, et presque sûrement.

3. Montrez que $\liminf_{n\to\infty} \sqrt{n} Z_n = 0$ presque sûrement.

Solution de l'exercice 6

1. On trouve par changement de variable polaire que Z_n a la loi de densité $z \in \mathbb{R} \mapsto z\mathrm{e}^{-z^2/2}1_{z>0}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

2. Comme $\mathbb{E}[|Z_1|] < \infty$, on peut invoquer la loi forte des grands nombres qui donne que $(Z_1 + \cdots + Z_n)/n \to \mathbb{E}[Z_1]$ p.s. donc en probabilité.

3. Soit $\varepsilon > 0$, on a
$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n}Z_n \leq \varepsilon\right) = \int_0^{\varepsilon/\sqrt{n}} z\mathrm{e}^{-z^2/2}dz.$$
Pour n grand, on a $\varepsilon/\sqrt{n} \leq 1$ donc $\mathrm{e}^{-z^2/2} \geq \mathrm{e}^{-1/2}$, ce qui nous donne
$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n}Z_n \leq \varepsilon\right) \geq \mathrm{e}^{-1/2} \int_0^{\varepsilon/\sqrt{n}} zdz = \mathrm{e}^{-1/2}\frac{\varepsilon^2}{2n}.$$
Donc $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(\sqrt{n}Z_n \leq \varepsilon) = \infty$, or les événements sont indépendants, donc par Borel-Cantelli
$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \left\{\sqrt{n}Z_n \leq \varepsilon\right\}\right) = 1.$$
On en déduit le résultat par les méthodes habituelles.

Exercice 7 Soit $\mu = (\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$ telle que $\mu_0+\mu_1 < 1$. Le *processus de Galton-Watson* $(Z_n)_{n\geq 0}$ est défini récursivement par $Z_0 \coloneqq 1$ et, pour $n \geq 0$:
$$Z_{n+1} \coloneqq \sum_{j=1}^{Z_n} X_j^{(n)},$$
où les variables aléatoires $(X_j^{(n)})_{j,n\geq 0}$ sont i.i.d. de loi μ. Ainsi, $(Z_n)_{n\geq 0}$ modélise l'évolution d'une population dont à chaque instant n les individus meurent en donnant naissance à des nombres d'enfants i.i.d. de loi μ. On introduit la *fonction génératrice* ψ associée à μ :
$$\psi(s) \coloneqq \sum_{n\geq 0} \mu_n s^n, \quad s \in [0,1].$$
On note finalement $m \coloneqq \sum_{n\geq 0} \mu_n n$ la moyenne du nombre d'enfants et $q \coloneqq \mathbb{P}\left(\exists n \in \mathbb{N} : Z_n = 0\right)$ la probabilité que la population s'éteigne au bout d'un certain temps.

La question, que se sont posée Bienaymé en 1845 puis Galton et Watson en 1874, est la suivante : quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que la population ne s'éteigne jamais ? L'objectif ici est de démontrer leur résultat : $q < 1 \Leftrightarrow m > 1$.

Bien qu'ayant démontré ce résultat plus tôt, Bienaymé n'a pas laissé son nom à ce fameux processus. Ultime injustice, la démonstration de Galton et Watson était fausse.

1. Montrer que ψ est strictement croissante, que ψ' est strictement croissante et que $\psi(1) = 1$.

2. Pour $s \in [0,1]$, on note $\psi_n(s) \coloneqq \mathbb{E}[s^{Z_n}]$. Montrer que $\psi_{n+1} = \psi_n \circ \psi$.

3. Montrer que $\mathbb{P}(T < \infty)$ est le plus petit point fixe de ψ. Conclure.

Solution de l'exercice 7

1. Pas de difficulté en dérivant sous le signe somme.

2. On démontre aisément par récurrence sur n que pour tout entier $n \geq 1$, Z_n est mesurable par rapport à la tribu $\sigma(X_j^{(k)} : j \geq 0, 0 \leq k \leq n-1)$. Ainsi Z_n est indépendant de $\sigma(X_j^{(n)} : j \geq 0)$.

   On obtient alors

$$\begin{aligned}
\psi_{n+1}(s) &= \mathbb{E}\left[s^{\sum_{j=1}^{Z_n} X_j^{(n)}}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[s^{\sum_{j=1}^{k} X_j^{(n)}} \mathbb{1}_{\{Z_n=k\}}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(Z_n = k\right) \mathbb{E}\left[s^{\sum_{j=1}^{k} X_j^{(n)}}\right] \qquad \text{car } Z_n \text{ et } (X_1^{(n)}, \dots, X_k^{(n)}) \text{ sont indépendants} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(Z_n = k\right) \mathbb{E}\left[s^{X_1^{(n)}}\right]^k \qquad \text{car } X_1^{(n)}, \dots, X_k^{(n)} \text{ sont iid} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(Z_n = k\right) \psi(s)^k \\
&= \psi_n(\psi(s)).
\end{aligned}$$

   D'où le résultat.

3. La probabilité d'extinction q est la réunion croissante des événements $\{Z_n = 0\}$. En remarquant que $\psi_n(0) = \mathbb{P}\left(Z_n = 0\right)$, il s'ensuit que q est la limite de $\psi^{(n)}(0)$ lorsque $n \to \infty$.

   Lorsque $m \leq 1$, on introduit la fonction $h(s) = \psi(s) - s$ qui vérifie, pour $0 \leq s < 1$ $h'(s) = \psi'(s) - 1 < \psi'(1) - 1 \leq 0$. Ainsi h est strictement décroissante sur $[0,1]$ avec $h(1) = 0$. On en déduit que $\psi(t) > t$ pour tout $t \in [0,1)$. Lorsque $m > 1$, on démontre de manière similaire que que $\psi(s) = s$ admet une unique solution sur $[0,1)$. Il est alors classique de montrer que la suite $\psi^{(n)}(0)$ converge vers le plus petit point fixe de ψ sur $[0,1]$ lorsque $n \to \infty$.