Processus Stochastiques
ENS Paris, 2020-2021

Rémy Mahfouf
Bureau V2
remy.mahfouf@ens.fr

TD 1 : Convergence en loi

Vendredi 18 Septembre

Exercice 1 Quelques applications du cours

1. Soient $X_1 \dots X_n$ i.i.d de loi symétrique sur $\mathbb{R}$. On suppose que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_1$ pour tout $n \geq 1$. Déterminez la loi de X_1.
2. Soient X et Y, i.i.d de carré intégrable. On suppose que $\frac{X+Y}{\sqrt{2}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} X$. Déterminez la moyenne puis la loi de X.
3. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$. Peut-on conclure que $h(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} h(X)$?
4. Supposons que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$. Montrez que $\Phi_{X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi_X$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$. On commencera par montrer que pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe un réel $K > 0$ tel que $\mathbb{P}(X_n \notin [-K, K]) \leq \varepsilon$ uniformément en n. On conclura avec les théorèmes usuels d'analyse.

Solution de l'exercice 1

1. Soit $\phi = \phi_{X_1}$ la fonction caractéristique de X_1. En utilisant l'indenpendance des X_i ainsi que l'indentité entre les lois, on obtient facilement que pour $n \geq 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$, on a $\phi(n\xi) = \phi(\xi)^n$. Comme la loi de X_1 est symétrique, la fonction caractéristique est réelle, et même positive (en utilisant le cas $n = 2$). Elle est aussi continue et bornée. Des résultats classiques d'equation fonctionelle (utilisant l'identité ci-dessus et la symétrie) montrent que $\log \circ \phi$ est linéaire sur $\mathbb{R}^{\pm}$ puis que que $\phi(\xi) = e^{-a|\xi|}$ avec a une constante réelle positive. On déduit de l'injectivité de la transformée de Fourier que X est une loi de Cauchy de paramètre a.
2. Comme X et Y sont dans L^2, on en déduit que X, Y et $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ sont dans L^1 puis l'égalité $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\frac{X+Y}{\sqrt{2}}] = \sqrt{2}\mathbb{E}[X] = 0$. Comme $X \in L^2$, on en déduit que $\phi = \phi_X$ est deux fois dérivable en 0 et qu'on a le développement de Taylor $\phi(\xi) = 1 - \frac{\sigma^2\xi^2}{2} + o(\xi^2)$ au voisinage de $\xi = 0$ (avec $\sigma^2 = \mathbb{E}[X^2]$). On fixe maintenant $\xi \in \mathbb{R}$. Par récurrence, on obtient pour $n \geq 0$ $\phi(\xi) = \phi(\frac{\xi}{2^n})^{2^{2n}}$. En utilisant le développement au voisinage de 0 on a
$$\phi(\xi) = \Big[1 - \frac{\sigma^2\xi^2}{2\cdot 2^{2n}} + o(\frac{\xi^2}{2^{2n}})\Big]^{2^{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp(-\frac{\sigma^2\xi^2}{2})$$
On en déduit que X suit une loi normale centrée de variance σ^2.

   Voici une solution alternative et élégante, due à **Ons R.** On montre par récurrence sur $n \geq 1$ que pour $X_1, \dots, X_{2^n}$ i.i.d de loi X, on a
$$\frac{X_1 + \dots + X_{2^n}}{\sqrt{2^n}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} X.$$

On applique alors le théorème central limite, au membre de gauche qui tend vers $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Comme l'espace des distributions de probabilités sur $\mathbb{R}$ est un espace métrique, on conclut facilement que $X \overset{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$.

3. La proposition est vraie. Pour toute fonction continue bornée f, la fonction $f \circ h$ reste continue bornée. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Portemanteau.

4. La convergence en loi assure que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est tendue. Fixons $\varepsilon > 0$. On peut trouver $K > 0$ tel que $\mathbb{P}(|X_n| \geq K) \leq \varepsilon$ uniformément en n. Ceci traduit que la masse de la suite de loi de probabilités ne s'échappe pas à l'infini. On pose pour $n \geq 0$, $\tilde{X}_n := X_n 1_{|X_n|\leq K+1}$. Sur le segement $[-M, M] \subset \mathbb{R}$, on peut appliquer la convergence uniforme des applications $\xi \mapsto \phi_{\tilde{X}_n}(\xi)$, qui convergence simplement (par convergence en loi et quantification) donc uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$ puisque toutes les fonctions $\phi_{\tilde{X}_n}$ sont lipchitziennes. Comme ε est arbitraire et indépendant de n, cela assure le résultat pour la suite des fonctions ϕ_{X_n}.

Exercice 2 Métrique de Lévy pour la convergence en loi
Soient F et G deux fonctions de distribution sur $\mathbb{R}$. On définit

$$d(F,G) := \inf\{\ \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, F(x-\delta) - \delta \leq G(x) \leq F(x+\delta) + \delta\}.$$

Montrez que d est une distance qui maitrise la topologie de la convergence en loi.

Solution de l'exercice 2

1. La *symétrie* provient de la définition. Soit x un point de continuité de F. On rappelle qu'il y a au plus un nombre dénombrable de points de discontinuité de F. Pour $\delta > 0$ on a $G(x) \leq F(x+\delta)+\delta$ puis $G(x) \leq F(x)$ en passant à la limite. On en déduit que $G \leq F$ Lebesque presque partout. De même en utilisant l'autre inégalité dans la définition on en déduit que $F \leq G$ Lebesque presque partout puis que $F = G$ en dehors d'un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. Comme F et G sont continues à droite, cela donne la *séparation.* Pour ce qui est de *l'inégalité triangulaire*, on remarque que $\delta_1 > d(F,G)$ et $\delta_2 > d(F,H)$ on a

$$G(x) \leq F(x+\delta_1) + \delta_1 \leq H([x+\delta_1] + \delta_2) + \delta_1 + \delta_2.$$

Cela montre que pour tout $\delta_3 > d(F,G) + d(G,H)$ (que l'on peut écrire comme somme de $\delta_1 > d(F,G)$ et de $\delta_2 > d(F,H)$ on a $G(x) \leq H(x+\delta_3)+\delta_3$. On obteint de même $G(x-\delta_3) - \delta_3 \leq H(x)$ La minoration est obtenue de la même manière. On passe à la borne inférieure en δ_3, ce qui donne le résultat.

2. Montrons que la distance d maitrise la convergence en loi.

   - On commence par supposer que $d(X_n, X) = d(F_{X_n}, F_X) = \frac{\delta_n}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Soit x un point de continuité de F_X. On a directement $F_X(x-\delta_n) - \delta_n) \leq F_{X_n}(x) \leq F(x+\delta_n)+\delta_n$. Comme F_X est continue en x, on a directement que $F_{X_n}(x)$ converge vers $F_X(x)$ lorsque n tend vers l'infini, ce qui assure la convergence en loi de X_n vers X.
   - On travaille par contraposée. Supposons (quitte à extraire à nouveau une sous-suite) que $X_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} X$ mais que $d(F_{X_n}, F_X) \geq \delta > 0$. On commence par ramener notre étude à la convergence des fonctions de partitions F_{X_n} sur un compact de $\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon \leq \frac{\delta}{4}$. Comme F_X est une fonction de partition et que $X_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} X$, il existe $M > 0$ (que l'on choisit tel que $\pm M$ sont des points de continuité de F_X) et tel que $F(x) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ sur $[M; +\infty[$ et $F(x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ sur $]-\infty; M]$. Comme les

F_{X_n} sont croissantes et que $F_{X_n}(\pm M) \longrightarrow F_X(\pm M)$, on a pour n suffisament grand $F_{X_n}(x-\varepsilon) \leq F_X(x) \leq F_{X_n}(x+\varepsilon)$ pour les réels x en dehors de $[-M;M]$. On peut ainsi supposer (quitte à extraire de nouveau) qu'on a par exemple l'inégalité stricte $F_{X_n}(x_n-\delta)-\delta > F_X(x_n)$ et avec $x_n \in [-M,M] \to x_\infty$. Pour n suffisament grand, on a les inégalités $F_{X_n}(x_\infty - \frac{\delta}{2}) - \delta \geq F_{X_n}(x_n-\delta)-\delta > F_X(x_n) \geq F_X(x_\infty - c\delta)$ avec $c \in]1/4;1/2[$. Quitte à diminuer légèrement δ, on peut supposer que $x_\infty - \frac{\delta}{2}$ est un point de continuité de F_X. Ceci est absurde en passant à la limite en n.

Remarque: Ce résultat reste vrai avec une distance définie de manière analogue sur des espaces métrisables séparables, mais la preuve (qui ne peut pas utiliser d'arguments basés sur l'ordre lexicographique) est un joli casse-tête.

Exercice 3 Methode des moments

1. Soit X une variable aléatoire à valeur dans $[-M,M]$. Montrez que la loi de X est uniquement déterminée par la suite $\{\mathbb{E}[X^k]\}_{k\geq 1}$ de ses moments. Montrez ensuite que pour $X, X_1, X_2, \ldots$ à support dans $[-M,M]$, on a
$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X \iff \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{E}[X_n^k] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[X^k].$$
2. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables gaussiennes qui convergent en loi vers une variable aléatoire X. Montrez que X est gaussienne.
3. On suppose maintenant que la suite des moments converge. Montrez que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est tendue, puis qu'il existe une variable X dont les moments sont exactement les limites des moments des $(X_n)_{n\geq 1}$ (on utilisera le théorème de représentation de Skorokhod).
4. Montrez qu'en général il n'y a pas convergence en loi.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>

1. Comme X est bornée par M, elle admet des moments de tout ordre. De plus, on peut appliquer le théorème de Fubini-Tonelli pour voir que sur $D(0,\frac{1}{M})$, on a le développement $\phi_X(\xi) = \phi(\xi) = \mathbb{E}[e^{i\xi X}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \mathbb{E}[X^k]}{k!} \xi^k$ i.e. ϕ est holomorphe au voisinage de 0. Le théorème d'identification des séries entières assure qu'une série entière au voisinage de 0 est caractérisée par ses coefficients (et donc ici par les moments de X). Le théorème de Lévy permet de conclure.
Supposons $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$. On pose $f_k := x \mapsto x^k \mathbb{1}_{|x|\leq M^k} + M^k \mathbb{1}_{x>M^k} - M^k \mathbb{1}_{x<-M^k}$. La fonction f_k est continue bornée, on en déduit par le théorème de Porte-manteau que $\mathbb{E}[f_k(X_n)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[f_k(X)]$ ce prouve l'implication dans ce sens. Réciproquement supposons pour tout les $k \geq 0$, on a $\mathbb{E}[X_n^k] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[X^k]$. On voit que sur $D(0,\frac{1}{2M})$, on a $\phi_{X_n}(\xi) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi_X(\xi)$ (uniformément en ξ par ailleurs). On conclut par le théorème de Lévy et l'identification des fonctions holomorphe par leur restriction sur un voisinage de 0.
2. En utilisant les fonctions caracteristiques, on montre (en passant au module en évaluant en $\xi = 1$) que $\phi_{X_n}(1) = \exp(-\frac{\sigma_n^2}{2})$ converge donc $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ converge. On voit ensuite que $e^{iu\mu_n}$ converge, puis le théorème de Lévy appliqué aux variables déterministes $Z_n \delta_{\mu_n}$ assure que $(\mu_n)_{n\geq 1}$ converge. La fonction caractéristique de X est donc de la forme $\exp(im\xi - \frac{\sigma^2\xi^2}{2})$, ce qui permet de conclure en utilisant le théorème de Lévy.

3. On commencer par utiliser le théorème de représentation de Skorokhod qui nous donne un espace $(\mathbb{X}, \mathcal{A}, \tilde{\mathbb{P}})$ et une suite $X_n' \sim X_n$ qui converge presque surement vers X_∞ dans $\mathbb{X}$. Par le lemme de Fatou, $\mathbb{E}[\liminf_{n\to\infty} |X_n|^k] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n^k] < \infty$ ce qui assure que X_∞ admet des moments de tout ordre. Soit ψ_L une fonction positive continue bornée par 1 et à support dans $[-L-1, L+1]$, qui est constante égale à 1 sur $[-L, L]$. Par convergence en loi on a $\mathbb{E}[X_n^k \psi_L(X_n^k)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[X_\infty^k \psi_L(X_\infty^k)]$. D'un autre coté on a $\mathbb{E}[|X_n^k \psi_L(X_n^k) - X_n^k|] \leq \mathbb{E}[|X_n^k| 1_{|X_n^k| \geq L}] \leq \mathbb{E}[X_n^{2k}]^{\frac{1}{2}} \mathbb{P}(X_n^k \geq L)^{\frac{1}{2}}$. La convergence des moments et la tension assurent ensuite le résultat en prenant $L \to \infty$.

4. On peut utiliser la loi sur $\mathbb{R}_+^\star$ qui admet la densité $f(x) := \frac{1}{c_\lambda} \exp(-\frac{1}{x^\lambda})[1 + a \sin(\beta x^\lambda)]$ avec $\lambda > 0$, $a \in]-1, 1[$ et β bien choisi. On calcule ses moments en utilisant le théorème des résidus.

Exercice 4 Une loi infiniement divisible

On veut montrer que $\xi \mapsto \exp(-|\xi|^\alpha)$ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire lorsque $\alpha \in]0, 2[$. On rappelle que sur $\mathbb{D}(1, 1)$ on a

$$(1 - z)^\beta = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\beta(\beta - 1) \cdots (\beta - n + 1)}{n!} z^n.$$

1. Montrez que si ϕ est une fonction caracteristique et $n \in \mathbb{N}$, alors ϕ^n l'est aussi. Montrez que si $\phi_1, \phi_2, \ldots$ sont des fonctions caracteristiques et que $\sum_n p_n = 1$ avec $p_n \geq 0$, alors $\sum_n p_n \phi_n$ est encore une fonction caracteristique.

2. Montrez que pour $\alpha \in]0, 2[$ et $\psi(t) = 1 - (1 - \cos(t))^{\alpha/2}$ on a

$$\psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos^n(t)$$

   avec $\sum_n p_n = 1$ puis que ψ est encore une fonction caracteristique.

3. Montrez que pour $\xi \in \mathbb{R}$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \psi(\xi \sqrt{2} n^{-1/\alpha})^n = \exp(-|\xi|^\alpha),$$

   et en déduire que $\exp(-|\xi|^\alpha)$ est à son tour une fonction caracteristique. Soient $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d de fonction caracteristique $\exp(-|\xi|^\alpha)$. Montrez que $n^{-1/\alpha}(X_1 + \ldots + X_n) \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_1$. Que dire du comportement de la marche simple dont les incréments sont de loi X_1?

4. Montrez pour X, X' deux variables i.i.d, on a $|\phi_X(\xi)|^2 = \mathbb{E}[e^{i\xi(X - X')}]$. En déduire que si X n'est pas constante, il existe $\delta, \varepsilon > 0$ tel que $|\phi_X(\xi)| \leq 1 - \varepsilon \xi^2$ pour $\xi \in [-\delta, \delta]$.

5. Montrez que si $|\phi_X| = 1$ au voisinage de $\xi = 0$, alors $|\phi_X| = 1$ sur $\mathbb{R}$. Montrez aussi que pour X, X' i.i.d., on a $X + X' \stackrel{\mathcal{L}}{=} X$ implique $X = 0$ presque surement. Conclure que $\xi \mapsto \exp(-|\xi|^\alpha)$ n'est pas la fonction caracteristique d'une loi de probabilité lorsque $\alpha > 2$.

Solution de l'exercice 4 Voir TD de la semaine prochaine.

Exercice 5 Theoreme local limite

On se donne une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ i.i.d de fonction caractéristique $\phi \in L^1$. On suppose $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathbb{E}[X_1^2] = 1$ et on pose $S_n = \sum_i^n X_i$.

1. Montrez que S_n admet une densité f_n donnée par $f_n(x) := \frac{1}{2\pi} \int e^{-itx} \phi^n(t) dt$.

2. Montrez que $\lim_{t\to\pm\infty} \phi(t) = 0$ puis que pour $[\varepsilon, K] \in \mathbb{R}_+^\star$, on a $\sup_{[\varepsilon,K]} |\phi| < 1$.

3. Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} f_n(\sqrt{n}x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.
Indication : On découpera l'intégrale.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u>

1. C'est une conséquence directe de la formule de transformée de Fourier inverse et du fait que $\phi_{S_n} = (\phi_{X_1})^n$.

2. On montre d'abord le résultat pour les fonctions en escalier à support compact puis on étend le résultat par densité dans L^1. Pour la seconde partie de la question, supposons que $|\phi(\xi)| = 1$ pour $x \neq 0$. On a donc (en utilisant la densité continue apportée par la question (1)) qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que
$$\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{it\xi - i\beta} dt = 1.$$
Comme f est en densité continue, on obtient directement que $e^{it\xi - i\beta} = 1$ Lebesgue presque partout ce qui est impossible (car $\xi \neq 0$).

3. Après un changement de variables linéaire, on obtient directement que
$$\sqrt{n} f_n(\sqrt{n}x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \phi^n(\frac{t}{\sqrt{n}}) dt$$
On découpe cette intégrale en 2 parties. Sur $[-K, K]$, on applique le théorème central limite ainsi que la question 3 de l'exercice 1 pour obtenir la convergence uniforme de $e^{-itx}\phi^n(\frac{t}{\sqrt{n}})$ vers $e^{-itx}e^{-\frac{t^2}{2}}$. En dehors de $[-K, K]$, par la question 2 (et en renversant le dernier changement de variable réalisé), on obtient que $\sqrt{n}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\phi^n(t) 1_{|t|\geq K\sqrt{n}} dt$ tend vers 0 en utilisant le théorème de convergence dominée. En particulier comme K est arbitraire on peut le prendre aussi grand que l'on veut et la limite voulue en découle.

Exercice 6 Inversion de Fourier
On veut montrer que pour X variable aléatoire réelle telle que $\Phi_X \in L^1(\mathbb{R})$, alors X admet une densité continue bornée f_X donnée par
$$f_X(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \Phi_X(t) dt.$$

1. Montrez que f_X définie ci-dessus est bien continue, bornée, puis déterminer une variable X_0 telle que l'identitée ci-dessus soit vraie.

2. Montrez que le resultat reste vrai pour εX_0 pour tout ε puis pour $\varepsilon X_0 + X$ pour toute variable X indépendante de X_0.

3. En supposant à présent que $\Phi_X \in L^1(\mathbb{R})$, conclure.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u>

1. Comme ϕ_X est dans L^1, il est clair que $t \mapsto e^{-itx}\phi_X(t)$ est intégrable. Les théorèmes usuels assurent que $x \mapsto e^{-itx}\phi_X(t)$ est continue bornée (avec par exemple $|\phi|$ comme hypothèse de domination). De plus $X_0 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ vérifie l'égalité demandée.

2. D'un côté on sait que $f_{\varepsilon X_0}(x) = \frac{1}{\varepsilon} f_{X_0}(\frac{x}{\varepsilon})$ (ce que l'on obtient dérivant la fonction de partition par exemple) et d'un autre coté $\phi_{\varepsilon X_0}(t) = \phi_{X_0}(\varepsilon t)$. Il suffit de faire le changement de variable $u = \frac{t}{\varepsilon}$ pour vérifier le résultat. Considérons maintenant X indépendante de X_0. Il suffit de prouver la formule $f_{X+\varepsilon_{X_0}}(x) = \mathbb{E}_X[f_{\varepsilon X_0}(x - X)]$ (où l'espérance est prise sous l'aléa associé à la variable X) pour conclure (en réinjectant dans l'égalité déjà obtenu pour εX_0). On a par les théorèmes usuels de dériavation
$$\mathbb{E}_X[f_{\varepsilon X_0}(x - X)] = \mathbb{E}_X[\frac{d}{dx} F_{\varepsilon X_0}(x - X)] = \frac{d}{dx}\mathbb{E}_X[F_{\varepsilon X_0}(x - X)] = \frac{d}{dx}\mathbb{E}_{X+\varepsilon X_0}[F_{\varepsilon X_0 + X}(x)].$$
La dernière égalité est justifiée l'indépendance, le théorème de Fubini et l'égalité
$$\mathbb{E}_X[\mathbb{E}_{\varepsilon X_0}[1_{\varepsilon X_0 \le x - X}]] = \mathbb{E}_X[\mathbb{E}_{\varepsilon X_0}[1_{\varepsilon X_0 + X \le x}]] = \mathbb{E}_{X+\varepsilon X_0}[F_{\varepsilon X_0 + X}(x)].$$
3. On conclut par convergence dominée en envoyant ε vers 0 (avec comme hypothèse de domination $|\phi_X|$).

Exercice 7 Marche aléatoire sur le cercle

Soit $(X_n)_{n\ge1}$ une suite de variables réelles i.i.d. On note $\bar{S}_n = X_1 + \cdots + X_n \equiv 1$. Déterminez la limite de $\bar{S}_n$ quand $n \to +\infty$.

Solution de l'exercice 7

On calcule la fonction caractéristique de $\bar{S}_n$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a
$$\mathbb{E}\left[e^{i2k\pi\bar{S}_n}\right] = \mathbb{E}\left[e^{i2k\pi S_n}\right] = \mathbb{E}\left[e^{i2k\pi X_1}\right]^n.$$
Par conséquent, on a
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[e^{i2k\pi\bar{S}_n}\right] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \left|\mathbb{E}\left[e^{i2k\pi X_1}\right]\right| < 1 \\ 1 & \text{si} \quad \mathbb{E}\left[e^{i2k\pi X_1}\right] = 1 \\ \text{n'existe pas} & \text{sinon.} \end{cases}$$
On suppose pour commencer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\left|\mathbb{E}\left[e^{i2k\pi X_1}\right]\right| < 1$. Dans ce cas, $\bar{S}_n$ converge vers la mesure uniforme sur $[0, 1]$, comme on peut s'en convaincre en se ramenant aux fonctions développables en séries de Fourier. On suppose maintenant qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left|\mathbb{E}\left[e^{i2k\pi X_1}\right]\right| = 1$. On note
$$T = \inf\left\{k \in \mathbb{N} : \left|\mathbb{E}\left[e^{i2k\pi X_1}\right]\right| = 1\right\}.$$
- Si $\mathbb{E}\left[e^{i2T\pi X_1}\right] = e^{i\theta}$, avec $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, la suite des transformées de Fourier de S_n ne converge pas, donc S_n ne converge pas en loi.
- Si $\mathbb{E}\left[e^{i2T\pi X_1}\right] = 1$, cela signifie que $\mathbb{P}(X_1 \in \{n/T, n \in \mathbb{Z}\}) = 1$. On observe alors que
$$\forall k \in \mathbb{Z}, \mathbb{E}\left[e^{2ik\pi X_1}\right] \begin{cases} = 1 & \text{si} \quad T|k \\ \text{est de norme inférieure à 1} & \text{sinon.} \end{cases}$$
En utilisant encore les fonctions développables en séries de Fourier, on montre que
$$S_n \Longrightarrow \text{Unif}(1/T, 2/T, \ldots 1\}.$$

Exercice 8 Transformation de Laplace

Soit X une variable aléatoire positive. Pour $z \in \mathbb{H}$, on définit $L_X(z) := \mathbb{E}[e^{-zX}]$. Montrez que L_X est continue sur $\overline{\mathbb{H}}$ puis qu'elle est injective (lorsqu'on se restreint aux variables positives).

Solution de l'exercice 8

La continuité sur $\overline{\mathbb{H}}$ provient des théorèmes usuels. Pour l'injectivité on observe que les transformées de Fourier et de Laplace coincident sur l'axe imaginaire pur, ce qui permet de conclure utilisant l'injectivité de la transformée de Fourier.