Processus Stochastiques Rémy Mahfouf
ENS Paris, 2021-2022 Bureau V2
remy.mahfouf@ens.fr

TD 10 : Théorème ergodique et convergence des chaînes

Vendredi 10 Décembre

Exercice 1 (Une suite de flips)
Soit $n \geq 4$. On considère un polygone régulier $\mathscr{P}_n$ à n sommets, numérotés de 1 à n. Une *triangulation* de $\mathscr{P}_n$ est une manière de tracer $n-3$ diagonales de $\mathscr{P}_n$ qui divisent $\mathscr{P}_n$ en $n-2$ triangles. On note $\mathscr{T}_n$ l'ensemble des triangulations de $\mathscr{P}_n$.

Si $t \in \mathscr{T}_n$ et d est une des diagonales de t, on peut supprimer d, ce qui crée un quadrilatère, et remplacer d par l'autre diagonale de ce quadrilatère (on dit alors qu'on *flippe d*). On obtient ainsi une triangulation qu'on note $\mathfrak{flip}(t,d)$.

On se fixe $t_0 \in \mathscr{T}_n$ et on définit $(T_k)_{k\geq 0}$ de la manière suivante : $T_0 = t_0$ et, pour tout $k \geq 0$, conditionnellement à $(T_0, \dots, T_k)$, on choisit uniformément une diagonale d_k de T_k et on pose $T_{k+1} = \mathfrak{flip}(T_k, d_k)$.

1. Vérifier que (T_k) est une chaîne de Markov sur $\mathscr{T}_n$ et qu'elle admet la mesure uniforme comme mesure stationnaire.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathscr{T}_n$, en partant de t, il est possible d'obtenir en un nombre fini de flips la triangulation où toutes les diagonales sont issues du sommet 1. En déduire que (T_k) est irréductible.
3. La chaîne (T_k) converge-t-elle vers la mesure uniforme ?

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

1. On vérifie que (T_k) est une chaîne de Markov de matrice de transition Q avec
$$Q(t,t') = \begin{cases} \frac{1}{n-3} & \text{si on peut passer de } t \text{ à } t' \text{ par un unique flip,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Conditionnellement à $(T_0, \dots, T_k)$, la diagonale d_k est uniforme dans T_k, donc pour s'assurer que T_{k+1} est uniforme parmi les triangulations "directement accessibles" depuis T_k, il suffit de vérifier que flipper deux arêtes différentes de T_k donne deux triangulations différentes. Ceci est vrai car si $d \neq d'$ sont deux diagonales de T_k, alors $\mathfrak{flip}(T_k, d)$ contient d', ce qui n'est pas le cas de $\mathfrak{flip}(T_k, d')$.
De plus, il est immédiat par la définition de Q que Q admet la mesure uniforme sur $\mathscr{T}_n$ comme mesure réversible, donc stationnaire.
2. Soit t_0 la triangulation dont les $n-3$ diagonales relient 1 à $3, 4, \dots, n-1$. On va montrer que si $t \neq t_0$, alors on peut, en flippant une arête de t, augmenter strictement le degré du sommet 1. Cela suffira à conclure car t_0 est la seule triangulation où le degré du sommet 1 est maximal (égal à $n-1$). Si $t \neq t_0$, soit $3 \leq i \leq n-1$ tel que 1 n'est pas relié à i dans t. Soient $j < i$ maximal et $k > i$ minimal tels que 1 est relié à j et k (ils existent car 1 est relié à 2 et n). Alors $(1, j, k)$ doit être un des triangles de t, donc j est relié à k. On a de plus $k - j \geq 2$ donc l'arête entre j et k est bien une diagonale. En flippant cette diagonale, le degré de 1 augmente de 1.
On en déduit $Q^{n-3}(t, t_0) > 0$ pour tout $t \in \mathscr{T}_n$ (le degré augmente de 1 à chaque étape et démarre au moins à 2, donc met au plus $n-3$ étapes à atteindre $n-1$). Par réversibilité, on a $Q^{n-3}(t_0, t') > 0$ pour tout $t' \in \mathscr{T}_n$, donc $Q^{2n-6}(t, t') > 0$ pour tous $t, t' \in \mathscr{T}_n$, et Q est bien irréductible.
3. D'après les deux questions précédentes, il suffit de déterminer si la chaîne (T_n) est apériodique. Pour $n = 4$, elle ne l'est pas. En effet, on vérifie facilement $|\mathscr{T}_4| = 2$, et on a $T_{n+1} \neq T_n$ pour tout n donc T est périodique de période 2.

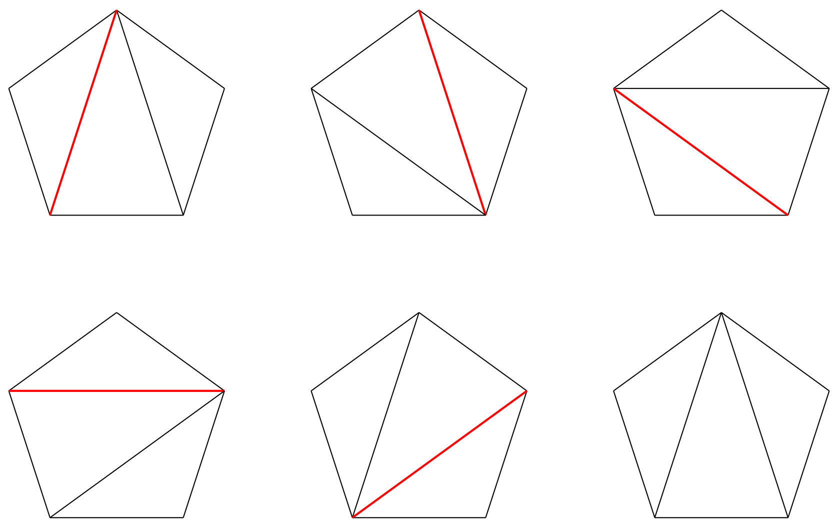

FIGURE 1 – En 5 flips, on revient à la triangulation de départ.

Soit maintenant $n \geq 5$. On a $Q^2(t,t) > 0$ pour tout t (flipper deux fois la "même" diagonale) donc la période de T vaut 1 ou 2. Par ailleurs, pour $n = 5$, on peut réaliser les opérations de la figure 1, ce qui montre qu'il existe t telle que $Q^5(t,t) > 0$. La période de la chaîne divise donc 5, donc elle vaut 1 et T est apériodique. Pour $n \geq 6$, il suffit d'isoler un pentagone et de faire les mêmes flips que sur la figure 1 à l'intérieur de ce pentagone pour obtenir le même résultat. On a donc convergence de T_k vers la mesure uniforme si et seulement si $n \geq 5$.

Remarque Si la chaîne obtenue n'est pas apériodique, une manière naturelle de la rendre apériodique est de la rendre "paresseuse", c'est-à-dire de lui donner à chaque étape une probabilité > 0 de ne pas bouger. Par exemple, avec probabilité p on a $T_{k+1} = T_k$, et avec probabilité $1-p$ on flippe une arête uniforme.

Exercice 2 (Rangement sur une étagère)
Chaque matin, un étudiant prend un des trois livres (numérotés de 1 à 3) posés sur son étagère. La probabilité qu'il choisisse le livre i est α_i, pour $i \in \{1,2,3\}$, où $0 < \alpha_i < 1$ et $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, et les choix qu'il fait jour après jour sont indépendants. Le soir, il replace le livre qu'il a pris à gauche des autres, sans les déranger. Quel est le comportement asymptotique de p_n, la probabilité que le n-ième matin au réveil l'étudiant trouve ses livres rangés dans l'ordre $(1,2,3)$ de gauche à droite ?

Solution de l'exercice 2

Pour tout $n \geq 0$, on note X_n l'ordre des livres au n-ième matin, avant que l'étudiant ne fasse son choix. La variable X_n est à valeurs dans l'espace des permutations

$$S = \{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}.$$

On note ξ_n le numéro du livre choisi par l'étudiant le n-ième matin. Les $(\xi_n)_{n\geq 0}$ sont des variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\{1,2,3\}$, on note γ la loi de ξ_1. Pour tout n, la variable X_n est $\sigma(\xi_0, \cdots \xi_{n-1})$-mesurable, donc ξ_n est indépendante de X_n.

On en déduit que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans S de matrice de transition Q avec, pour toute permutation (a,b,c) de $(1,2,3)$,

$$\begin{cases} Q((a,b,c),(a,b,c)) = \alpha_a, \\ Q((a,b,c),(b,a,c)) = \alpha_b, \\ Q((a,b,c),(c,a,b)) = \alpha_c, \\ Q((a,b,c),(d,e,f)) = 0 \qquad \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Cette chaîne est irréductible et apériodique. Elle possède donc une unique mesure de probabilité invariante, que l'on note π. De plus, pour tout $x \in S$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = x) = \pi(x).$$

On détermine maintenant π. Soit $(a,b,c) \in S$. Comme $\pi Q = \pi$, on a

$$\pi(a,b,c) = \alpha_a \left(\pi(a,b,c) + \pi(b,a,c) + \pi(b,c,a)\right).$$

En particulier, on a $\pi(a,b,c) + \pi(a,c,b) = \alpha_a \sum_{x \in S} \pi(x) = \alpha_a$. Par symétrie, on a donc aussi $\pi(b,a,c) + \pi(b,c,a) = \alpha_b$. On en déduit

$$\pi(a,b,c) = \alpha_a \left(\pi(a,b,c) + \pi(b,a,c) + \pi(b,c,a)\right) = \alpha_a \left(\pi(a,b,c) + \alpha_b\right),$$

donc $\pi(a,b,c) = \frac{\alpha_a \alpha_b}{1-\alpha_a}$. En particulier $\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{\alpha_1\alpha_2}{1-\alpha_1}$.

Exercice 3 Soit X une chaîne de Markov irreductible récurrente positive sue E. On note μ son unique de mesure de probabilité invariante. On se donne une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ tel que $\int_E |f| d\mu < \infty$. On définit l'équation de Poisson relative à f d'inconnue g (que l'on recherche intégrable) par

$$g = f + Qg. \tag{1}$$

1. Montrez que si l'équation de Poisson relative à f admet une solution, alors $\int_E f d\mu = 0$.
2. Montrez que deux solutions de (1) différent d'une constante additive.
3. On se fixe $z \in E$. On pose $T_y = \inf\{n \geq 1, X_n = y\}$ et on définit pour $x \in E$

$$g(x) := \mathbb{E}_x[\sum_{n=0}^{T_z-1} f(X_n)]. \tag{2}$$

   Montrez que g est finie sur E, nulle en z et qu'elle est solution de (1).

Solution de l'exercice 3

— Comme la mesure μ est invariante pour la chaîne, on voit directement (en inversant l'ordre de sommation) que $\int_E |Qg| d\mu < \infty$ puis $\int_E g d\mu = \int_E Qg d\mu$ ce qui assure le résultat.

— Soient $g_{1,2}$ deux solutions de (1). Alors $h = g_1 - g_2$ est harmonique sur E, intégrable (contre μ). L'harmonicité assure que $(h(X_n))_{n\geq 0}$ est une martingale, et cette martingale est bornée dans $L^1(\mu)$ puisque l'invariance de μ assure $h(X_n) \overset{(\mathcal{L})}{=} h(X_0)$. Comme la chaîne est récurrente et la martingale $(h(X_{nT_x}))_{n\geq 0}$ converge presque surêment, on obtient directement $g_1 - g_2(x) = \mathbb{E}_\mu[h(X_0)]$

— On rappelle la formule établie en cours pour h intégrable

$$\mathbb{E}_x[T_x] \sum_{y\in E} h(y)\mu(y) = \mathbb{E}_x[\sum_{n=0}^{T_x-1} h(X_n)]$$

Comme f est de moyenne nulle, la formule précédente évaluée en z assure que $g(z) = 0$ (car la chaîne est récurrente positive). De plus si on substitue dans la derniere formule $h = |f|$ et qu'on évalue à nouveau eu z, on obtient pour $g(x) < \infty$ car

$$\mathbb{E}_z[T_z] \sum_{y\in E} |f(y)|\mu(y) = \mathbb{E}_z\big[\sum_{n=0}^{T_z-1} |f(X_n)|\big] \geq \mathbb{E}_z\big[\sum_{n=T_x}^{T_z-1} |f(X_n)|; T_x < T_z\big] = \mathbb{P}_z(T_x < T_z)\mathbb{E}_x\big[\sum_{n=0}^{T_z-1} |f(X_n)|\big].$$

Il faut vérifier (pour utiliser la propriété de Markov Forte) que l'événement $\{T_x < T_z\}$ est dans $\mathcal{F}_{T_x}$, ce qui est vrai $\{T_x < T_z\} \cap \{T_x = n\} = \{n < T_z\} \cap \{T_x = n\} \in \mathcal{F}_n$ pour $n \geq 0$.

Pour vérifier l'équation de Poisson, on commence par réaliser la décomposition $g(x) = f(x) + \mathbb{E}_x\big[\sum_{n=1}^{T_z-1} f(X_n)\big]$ puis on décompose le membre de droite

$$\mathbb{E}_x\big[\sum_{n=1}^{T_z-1} f(X_n)\big] = \sum_{\substack{y\in E \\ k\geq 1 \\ n\leq k-1}} \mathbb{E}_x\big[f(X_n)1_{X_n=y}1_{T_z=k}\big] = \sum_{\substack{y\in E \\ k\geq 1 \\ n\leq k-1}} Q(x,y)\mathbb{E}_y\big[f(X_{n-1})1_{T_z=k-1}\big]. \tag{3}$$

Cette égalité entre les termes sommés est obtenue en utilisant la propriété de Markov simple au temps 1 et en décomposant selon la valeur de X_n. Un décalage d'indice permet alors de conclure.

Exercice 4 (Un contre-exemple)
On note G le graphe $\mathbb{Z}^3$, auquel on a recollé en 0 une copie de $\mathbb{N}$. Plus formellement, l'ensemble des sommets de G est $\mathbb{Z}^3 \cup \mathbb{N}^*$, et deux sommets x et y de G sont reliés si et seulement si x et y sont voisins dans $\mathbb{Z}^3$, ou x et y sont voisins dans $\mathbb{N}^*$, ou $x = 0 \in \mathbb{Z}^3$ et $y = 1 \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que toute fonction harmonique bornée sur G est constante.
2. Montrer qu'il existe une fonction harmonique positive non-constante sur G.

Solution de l'exercice 4

1. Soit h une fonction harmonique bornée sur G. Alors pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on a $h(i) = \frac{1}{2}\left(h(i-1) + h(i+1)\right)$ (en faisant l'identification $(0,0,0) = 0$), donc $h(i+1) - h(i)$ ne dépend pas de $i \in \mathbb{N}$, donc h est affine sur $\mathbb{N}$. Comme h est bornée, elle est donc constante sur $\mathbb{N}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{Z}^3 \backslash \{0\}$, les voisins de x sont les mêmes dans G et dans $\mathbb{Z}^3$. Comme h est harmonique sur G, elle est donc harmonique sur $\mathbb{Z}^3 \backslash \{0\}$. Enfin, on a
$$h(0) = \frac{1}{7}\left(h(1) + \sum_{y \text{ voisin de } 0 \text{ dans } \mathbb{Z}^3} h(y)\right). \tag{4}$$
Comme $h(1) = h(0)$, on a donc
$$h(0) = \frac{1}{6} \sum_{y \text{ voisin de } 0 \text{ dans } \mathbb{Z}^3} h(y),$$
donc h est harmonique sur $\mathbb{Z}^3$. Comme on l'a vu dans l'exercice 1 du TD9, toute fonction harmonique bornée sur $\mathbb{Z}^3$ est constante, donc h est constante sur $\mathbb{Z}^3$. On en déduit que h est constante sur G.
2. Tout d'abord, il existe une fonction positive sur $\mathbb{Z}^3$ qui est harmonique sur $\mathbb{Z}^3 \backslash \{0\}$: on note (X_n) la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^3$ et, pour $x \in \mathbb{Z}^3$, on pose
$$h(x) = \mathbb{P}_x\left(\exists n \geq 0, X_n = 0\right).$$
En conditionnant sur le premier pas, il est facile de montrer que h est bien harmonique sur $\mathbb{Z}^3 \backslash \{0\}$. On a de plus $h(0)10$ et $0 \leq h(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^3$. Il existe alors une unique valeur de $h(1)$ telle que (4) soit vérifiée, et on a $h(1) > 1$. On prend alors $h(n) = 1 + n\left(h(1) - 1\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, de sorte que h est harmonique sur $\mathbb{N}^*$. La fonction h est alors bien harmonique sur G positive sur G, et non constante.

Exercice 5 (Les parapluies)
Michel possède k parapluies qu'il garde soit chez lui, soit dans son bureau. Le matin, avant d'aller au travail, il regarde par la fenêtre le temps qu'il fait :
— s'il fait beau, il ne prend pas de parapluie ;
— s'il pleut et qu'il a un parapluie chez lui, il prend le parapluie et va au travail ;
— s'il pleut et qu'il n'y a plus de parapluie, il décide de rester chez lui.
Le soir, il fait la même chose (s'il pleut et qu'il n'a pas de parapluies, il décide de rentrer quand même). On suppose que chaque demi-journée, il pleut avec probabilité p et il fait beau avec probabilité $1-p$ avec $0 < p < 1$, et que de plus, les météos des demi-journées sont indépendantes. Michel souhaite ne rater en moyenne qu'une journée de travail par mois. Sachant qu'il pleut 111 jours par an à Paris, combien de parapluies doit-il posséder pour cela ?

Solution de l'exercice 5
Notons X_n le nombre de parapluies que Michel a chez lui le soir du n-ième jour. Chaque jour :
— avec proba $p(1-p)$, il pleut le matin mais pas l'après-midi, auquel cas X_n diminue de 1 (sauf si $X_n = 0$),
— avec proba $p(1-p)$, il pleut l'après-midi mais pas le matin, auquel cas X_n augmente de 1 (sauf si $X_n = k$),
— avec proba $p^2 + (1-p)^2$, il pleut toute la journée ou pas du tout, auquel cas X_n ne change pas (y compris si $X_n = 0$ ou k).

On en déduit que X est une chaîne de Markov sur $\{0,1,\dots,k\}$ de matrice de transition Q avec

$$Q(i,j) = \begin{cases} p(1-p) & \text{si } |i-j| = 1, \\ p^2 + (1-p)^2 & \text{si } i = j \notin \{0,k\}, \\ 1 - p(1-p) & \text{si } i = j \in \{0,k\}, \\ 0 & \text{si } |i-j| \geq 2. \end{cases}$$

Cette chaîne de Markov est irréductible car $Q^{|i-j|}(i,j) > 0$ pour tous i, j et apériodique car $Q(0,0) > 0$. Elle admet donc une unique mesure de probabilité stationnaire et converge vers cette mesure stationnaire. On cherche une mesure μ réversible pour Q, i.e. telle que pour tous i et j,

$$\mu(i)Q(i,j) = \mu(j)Q(j,i). \tag{5}$$

La condition 5 est trivialement vérifiée pour $i = j$ (par symétrie) et pour $|i-j| \geq 2$ (les deux membres sont nuls), donc il suffit d'avoir

$$\mu(i)Q(i,i+1) = \mu(i+1)Q(i+1,i)$$

pour tout $0 \leq i \leq k-1$, soit $p(1-p)\mu(i) = p(1-p)\mu(i+1)$, soit $\mu(i+1) = \mu(i)$. Ainsi, la mesure uniforme μ sur $\{0,1,\dots,k\}$ est réversible, donc stationnaire, pour Q, donc

$$\mathbb{P}\left(X_n = 0\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu(0) = \frac{1}{k+1},$$

et

$$\mathbb{P}\left(\text{Michel reste chez lui le jour } n\right) = \mathbb{P}\left(X_n = 0 \text{ et il pleut le } n\text{-ième matin}\right) = p\,\mathbb{P}(X_n = 0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{p}{k+1}.$$

Or, il pleut en moyenne 111 jours par an à Paris. On a donc $1 - (1-p)^2 = \frac{111}{365}$, soit $p \approx 0,1658$. Pour ne rater qu'un jour de travail par mois en moyenne, il faut donc $\frac{p}{k+1} \leq \frac{1}{20}$ (4 semaines de 5 jours), donc Michel doit avoir au moins $20p - 1 \approx 2,3$ parapluies, donc au moins 3.