Processus Stochastiques
ENS Paris, 2021-2022

Rémy Mahfouf
Bureau V2
remy.mahfouf@ens.fr

TD 2 : Fonctions caracteristiques et Théorème de Lindeberg

Vendredi 1er Octobre

Exercice 1 Une loi infiniement divisible

On veut montrer que $\xi \mapsto \exp(-|\xi|^\alpha)$ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire lorsque $\alpha \in]0,2[$. On rappelle que sur $\mathbb{D}(0,1)$ on a

$$(1-z)^\beta = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-n+1)}{n!} z^n.$$

1. Montrez que si ϕ est une fonction caracteristique et $n \in \mathbb{N}$, alors ϕ^n l'est aussi. Montrez que si $\phi_1, \phi_2, \ldots$ sont des fonctions caracteristiques et que $\sum_n p_n = 1$ avec $p_n \geq 0$, alors $\sum_n p_n \phi_n$ est encore une fonction caracteristique.

2. Montrez que pour $\alpha \in]0,2[$ et $\psi(t) = 1 - (1-\cos(t))^{\alpha/2}$ on a
$$\psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos^n(t)$$
avec $\sum_n p_n = 1$ puis que ψ est encore une fonction caracteristique.

3. Montrez que pour $\xi \in \mathbb{R}$ on a
$$\lim_{n\to\infty} \psi(\xi\sqrt{2}n^{-1/\alpha})^n = \exp(-|\xi|^\alpha),$$
et en déduire que $\exp(-|\xi|^\alpha)$ est à son tour une fonction caracteristique. Soient $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d de fonction caracteristique $\exp(-|\xi|^\alpha)$. Montrez que $n^{-1/\alpha}(X_1 + \ldots + X_n) \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_1$. Que dire du comportement asymptotique de la marche simple d'incréments de loi X_1?

4. Montrez pour X, X' deux variables i.i.d, on a $|\phi_X(\xi)|^2 = \mathbb{E}[e^{i\xi(X-X')}]$. En déduire que si X n'est pas constante, il existe $\delta, \varepsilon > 0$ tel que $|\phi_X(\xi)| \leq 1 - \varepsilon\xi^2$ pour $\xi \in [-\delta, \delta]$.

5. Montrez que si $|\phi_X(\xi)| = 1$ sur $[-\delta, \delta]$, alors $|\phi_X(\xi)| = 1$ sur $\mathbb{R}$. Montrez aussi que pour X, X' i.i.d., on a $X + X' \stackrel{\mathcal{L}}{=} X$ implique $X = 0$ presque surement. Conclure que $\xi \mapsto \exp(-|\xi|^\alpha)$ n'est pas la fonction caracteristique d'une loi de probabilité lorsque $\alpha > 2$.

Solution de l'exercice 1

1. On se donne X_i une suite de variables i.i.d de fonction caracteristique ϕ. Si on pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, alors S_n est de fonction caracteristique ϕ^n. Pour la seconde partie de la question, on se donne $(Y_i)_{i\geq 1}$ une suite de variable aléatoires de fonction caracteristiques respectvives $(\phi_i)_{i\geq 1}$, mutuellement indépendantes ainsi qu'une variable aléatoire Z indépendante des $(Y_i)_{i\geq 1}$ qui vérifie $i \geq 1$, $\mathbb{P}(Z = i) = p_i$. La variable $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i(Z) X_i$ est bien définie, mesurable, et a pour fonction caracteristique $\sum_n p_n \phi_n$.

2. C'est une conséquence immédiate du developpement rappelé au dessus. On voit que les p_n sont positifs par un developpement explicite puis $\sum_n p_n = 1$ en évaluant en $t = 0$.

3. C'est un calcul asymptotique usuel. On conclut par le théorème de Lévy. Pour la seconde partie de la question, on utilise l'égalité entre fonctions caracteristiques et de nouveau le théorème de Lévy. La marche aléatoire oscille entre $-\infty$ et $+\infty$ en évitant (à partir d'un certain rang) tout intervalle borné. En effet, la probabilité que $S_n \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ décroit comme $O(n^{-\frac{1}{\alpha}}$, puis le lemme de Borel-Cantelli permet de conclure que la marche ne visite presque surement qu'un nombre fini de fois $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Ceci signifie que la marche est transiente et oscille entre $-\infty$ et $+\infty$.

4. Par indépendance on a directement $\mathbb{E}[e^{i\xi(X-X')}] = \mathbb{E}[e^{i\xi X}]\mathbb{E}[e^{-i\xi X}] = \phi_X(\xi)\overline{\phi_X(\xi)}$. On pose $Y = X - X'$. Pour $\xi \leq \frac{\pi}{4A}$ on conclut à partir de l'inégalité

$$|\phi_X(\xi)|^2 \leq \mathbb{E}[\cos(\xi Y)\mathbb{1}_{|Y|\leq A}] + \mathbb{P}(|Y| \geq A) \leq 1 - \frac{\xi^2}{2}\mathbb{E}[Y^2 1_{|Y|\leq A}].$$

5. On utilise l'injectivité de la transformée de Fourier et la question précédente. Pour la seconde identité, la transformée de Fourier et égale à son carré, continue en 0 et egale à 1. On utilise le développement ci-desssus pour conclure que $\xi \mapsto \exp(-|\xi|^\alpha)$ n'est pas une fonction caracteristique.

Exercice 2 Application simples de la condition de Lindeberg

1. Soit $X_n \sim \mathrm{Bin}(n, p_n)$. Montrez que

$$\frac{X_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

si et seulement si $np_n(1-p_n) \to \infty$ lorsque $n \to \infty$.

2. Soit $(X_i)_{i\geq 0}$ une suite de variable i.i.d. centrées de variance σ^2. On se donne une suite $(z_{n,k})_{1\leq k\leq n}$ de constantes qui vérifient lorsque $n \to \infty$

$$\frac{\max_{k\leq n} z_{n,k}^2}{\sum_{j=1}^n z_{n,j}^2} \longrightarrow 0.$$

Montrez que pour $T_n = \sum_{k=1}^n z_{n,k}X_k$, on a $\mathrm{Var}(T_n)^{-\frac{1}{2}}T_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$.

3. Soit $(X_{n,k})_{1\leq k\leq n}$ une suite de variables de Poisson de paramètre $\frac{k}{n}$. Soient $(Y_{n,k})_{1\leq k\leq n}$ une suite de variable indépendantes, centrées, telles que $X_{n,k}$ et $Y_{n,k}$ ont les mêmes moments d'ordre 2 et 3. Démontrez un théorème central limite pour $\sum_{k=1}^n Y_{n,k}$.

Solution de l'exercice 2 On rappelle la condition de Lindeberg. Il suffit de vérifer que pour $\varepsilon > 0$ et $s_n^2 = \sum_{k=1}^{r_n} \sigma_{n,k}^2$, on a

$$\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{r_n} \mathbb{E}[X_{n,k}^2; X_{n,k} \geq \varepsilon s_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

1. Soit $Y_{n,k} = \mathcal{B}(p_n)$ i.i.d. On a clairement $X_n = \sum_{k=1}^n Y_{n,k}$, $s_n = \sqrt{np_n(1-p_n)}$. La condition de Lideberg devient alors

$$\frac{1}{np_n(1-p_n)}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Y_{n,k}^2; Y_{n,k} \geq \varepsilon\sqrt{np_n(1-p_n)}].$$

Si $np_n(1-p_n)$ tend vers l'infini, $\mathbb{E}[Y_{n,k}^2; Y_{n,k} \geq \varepsilon\sqrt{np_n(1-p_n)}] = 0$ pour n suffisament grand ce qui assure la condition de Lindeberg est triviallement vérifiée. D'un autre coté supposons la convergence en loi annoncée. En utilisant l'égalité $X_n = \sum_{k=1}^n Y_{n,k}$, on voit par le théorème de Levy qu'il faut que $e^{-inp_n\xi}(p_n + (1-p_n)e^{i\xi})$ converge vers $e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ ce qui n'est possible que si $np_n(1-p_n)$ tend vers l'infini (on distinguera les sous-cas p_n tend vers 0 ou 1 pour conclure). Une autre option est d'utiliser l'équivalence de la condition de Lindeberg dans le cadre du theorème de Lindeberg-Feller.

2. Dans ce cas on a $s_n^2 = \sum_{j=1}^n \sigma^2 z_{n,j}^2$. De plus $\mathbb{E}[X_{n,k}^2 \mathbb{1}_{z_{n,k}^2 X_{n,k}^2 \geq \varepsilon s_n^2}]$ tend vers 0 uniformememnt en $0 \leq k \leq n$ lorsque n tend vers l'infini (par convergence dominée par exemple). On applique alors le lemme de Cesaro pour conclure.

3. La variable de Poisson de paramètre λ est d'esperance et de variance λ (i.e. l'esperance de son carré vaut $\lambda + \lambda^2$). Son moment d'ordre 3 vaut aussi λ (voir les superbes video d'explication sur YouTube). On applique maintenant la condition de Lyapunov avec $\delta = 1$: Pour obtenir les conclusions du théorème de Lindeberg, il suffit de montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{r_n} \frac{\mathbb{E}[|X_{n,k}|^{2+\delta}]}{s_n^{2+\delta}} = 0.$$
Le calcul montre $s_n \sim Cn^{1/2}$ et $\sum\limits_{k=1}^n \mathbb{E}[|X_{n,k}|^3] \sim \sum\limits_{k=1}^n \frac{k^3}{n^3} \sim C'n$ ce qui permet de conclure.

Exercice 3 Un contre exemple On considère une suite $(X_k)_{k\geq 1}$ de variables indépendantes centrées réduites telles que
$$\mathbb{P}(X_k = x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x = \pm 1, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2k^2} & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{4k^2} & \text{si } x = \pm k. \end{cases}$$
On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Montrez que la condition de Lindeberg n'est pas vérifiée puis déterminez la limite en loi de $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> On voit facilement que la condition de Lindeberg n'est pas vérifiée puisque $s_n = \sqrt{n}$ et pour $k \geq \sqrt{n}$, on a $\mathbb{E}[X_{n,k}^2; X_{n,k} \geq \sqrt{n}] = k^2\mathbb{P}(X_k^2 = k^2) = \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{r_n} \mathbb{E}[X_{n,k}^2; X_{n,k} \geq \varepsilon s_n]$ tend vers $\frac{1}{2}$. On voit en particulier que la limite en loi n'est pas $\mathcal{N}(0,1)$ puisqu'on peut appliquer la théorème de Lindeberg-Feller (et la condition si et seulement si). Soit $Y_k = X_k \mathbb{1}_{X_k \leq 1}$. Par le lemme de Borel Cantelli, on a presque surement $X_k = Y_k$ pour k assez grand. On applique le theorème central limite aux Y_k ce qui permet de conclure que pour $\tilde{S}_n = Y_1 + \ldots + Y_n$, on a $(n^{-\frac{1}{2}}\tilde{S}_n)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$. Fixons $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Comme $|\tilde{S}_n - S_n|$ est presque surement borné, on voit que $\lim_{n\infty} \mathbb{P}(\{\frac{\tilde{S}_n}{\sqrt{n}} \geq a\} \cap \{\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq a - \varepsilon\}) = 0$. On de la convergence de $(n^{-\frac{1}{2}}\tilde{S}_n)$ vers $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$ que pour n suffisament grand
$$\mathbb{P}(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq a) \geq \int_{a-\varepsilon}^{\infty} f_{\mathcal{N}(0,\frac{1}{2})}(x)dx + \varepsilon + \delta_n, \tag{1}$$
avec δ_n qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. On conclut en utilisant le fait que ε peut être choisi arbitrairement petit.

Exercice 4 Le pré-mouvement Brownien

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d centrées de variance σ^2. On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ et pour tout réel $t \geq 0$
$$S_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]}$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x. Montrez que pour $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p$ on a

$$(S_{t_1}^{(n)}, S_{t_2}^{(n)}, \ldots, S_{t_p}^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} (U_1, U_2, \ldots, U_p),$$

et la loi limite est caracterisée comme il suit:

- Les variables aléatoires $U_1, U_2 - U_1, \ldots, U_p - U_{p-1}$ sont mutuellement indépendantes.
- Pour $j \leq p$, on a $U_j - U_{j-1}$ est une Gaussienne centrée de variance $\sigma^2(t_j - t_{j-1})$ (avec la convention $U_0 = 0$ presque surement).

Par le théorème de Lévy, il suffit de montrer que pour tous $\xi_1, \ldots, \xi_p \in \mathbb{R}$ on a

$$\mathbb{E}\Big[\exp\big(i\sum_{i=1}^{p}\xi_j S_{t_j}^{(n)}\big)\Big] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}\Big[\exp\big(i\sum_{i=1}^{p}\xi_j U_j\big)\Big]$$

ce qui équivaut à démontrer que pour tout $\eta_1, \ldots, \eta_p \in \mathbb{R}$ on a

$$\mathbb{E}\Big[\exp\big(i\sum_{i=1}^{p}\eta_j (S_{t_j}^{(n)} - S_{t_{j-1}}^{(n)})\big)\Big] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}\Big[\exp\big(i\sum_{i=1}^{p}\eta_j (U_j - U_{j-1})\big)\Big]$$

L'égalité $\mathbb{E}\Big[\exp\big(i\sum_{i=1}^{p}\eta_j(U_j - U_{j-1})\big)\Big] = \exp\big(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}\sigma^2\eta_j^2(t_j - t_{j-1})\big)$ est claire grâce à l'indépendance des incréments des U_k. D'un autre coté on a

$$S_{t_j}^{(n)} - S_{t_{j-1}}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=[nt_{j-1}]}^{[nt_j]} X_k$$

ce qui montre que les variables $S_{t_j}^{(n)} - S_{t_{j-1}}^{(n)}$ sont mutuellement indépendantes pour $j \leq p$. De plus lorsque l'on fixe j on a

$$S_{t_j}^{(n)} - S_{t_{j-1}}^{(n)} \overset{\mathcal{L}}{=} \frac{\sqrt{[nt_j] - [nt_{j-1}]}}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{[nt_j] - [nt_{j-1}]}} S_{[nt_j]} - S_{[nt_{j-1}]}$$

La théorème central limite permet de conclure sur les fonctions caracteristiques des $S_{t_j}^{(n)} - S_{t_{j-1}}^{(n)}$ puis l'indépendance des incréments de la marche remarquée ci-dessus termine la preuve.