Processus Stochastiques
ENS Paris, 2021-2022

Rémy Mahfouf
Bureau V2
remy.mahfouf@ens.fr

TD 3 : Esperance conditionnelle

Vendredi 8 Octobre

Exercice 1 (Calculs gentils)
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables i.i.d. intégrables, et $S = \sum_{i=1}^n X_i$. Calculer $\mathbb{E}[S|X_1]$ et $\mathbb{E}[X_1|S]$.

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> On a

$$\mathbb{E}[S|X_1] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i|X_1] = X_1 + (n-1)\mathbb{E}[X_1].$$

D'autre part, on a

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i|S] = \mathbb{E}[S|S] = S.$$

Or, les variables X_i jouent des rôles symétriques, donc les $\mathbb{E}[X_i|S]$ sont toutes égales, d'où

$$\mathbb{E}[X_1|S] = \frac{1}{n}S.$$

On peut aussi le vérifier plus proprement de la manière suivante. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. On sait que la loi jointe du couple (X_i, S) ne dépend pas de i, donc les $\mathbb{E}[X_i f(S)]$ sont les mêmes pour tout i. Comme leur somme vaut $\mathbb{E}[Sf(S)]$, on a donc

$$\mathbb{E}[X_1 f(S)] = \mathbb{E}\left[\frac{S}{n} f(S)\right]$$

pour toute fonction f mesurable bornée, donc $\mathbb{E}[X_1|S] = \frac{S}{n}$.

Exercice 2 (Une question pas si facile)
On considère X une variable aléatoire intégrable et h une fonction telle que $h(X)$ est intégrables. Calculez $\mathbb{E}[h(X)||X|]$. On traitera d'abord le cas où X est symétrique, le cas où X admet une densité puis le cas général.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>
Voir TD de la semaine prochaine.

Exercice 3 (Un peu d'abstract nonsense)
Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs respectivement dans E et F. Soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On suppose que X est indépendante de $\mathcal{G}$ et que Y est $\mathcal{G}$-mesurable. Montrer que pour toute fonction mesurable $g : E \times F \to \mathbb{R}^+$, on a

$$\mathbb{E}[g(X,Y)|\mathcal{G}] = \int_E g(x,Y) P_X(\text{x})$$

où P_X désigne la loi de X. Le membre de droite est la composée de la variable aléatoire Y par l'application $\phi : y \to \int g(x,y) P_X(dx)$ (où ϕ est mesurable grâce au théorème de Fubini).

Solution de l'exercice 3

La variable aléatoire $\phi(Y)$ est $\sigma(Y)$-mesurable, donc $\mathcal{G}$-mesurable. Pour montrer l'égalité p.s. $\mathbb{E}[g(X,Y)|\mathcal{G}] = \phi(Y)$, il suffit donc de vérifier que pour toute variable aléatoire Z positive $\mathcal{G}$-mesurable,

$$\mathbb{E}[g(X,Y)Z] \;=\; \mathbb{E}[\phi(Y)Z]\,.$$

Notons $P_{(X,Y,Z)}$ la loi du triplet (X,Y,Z), qui est une mesure de probabilité sur $E \times F \times \mathbb{R}^+$. Comme X est indépendante de (Y,Z), on a

$$P_{(X,Y,Z)} \;=\; P_X \otimes P_{(Y,Z)}$$

et donc, en utilisant le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(X,Y)Z] &= \int_{E\times F\times\mathbb{R}^+} g(x,y)zP_{(X,Y,Z)}(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z) \\
&= \int_{E\times F\times\mathbb{R}^+} g(x,y)zP_X(\mathrm{d}x)P_{(Y,Z)}(\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z) \\
&= \int_{F\times\mathbb{R}^+} z\left(\int_E g(x,y)P_X(\mathrm{d}x)\right)P_{(Y,Z)}(\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z) \\
&= \int_{F\times\mathbb{R}^+} z\phi(y)P_{(Y,Z)}(\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z) \\
&= \mathbb{E}[\phi(Y)Z],
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu.

Exercice 4 (Espérance conditionnelle et convergence en probabilité)
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires positives sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ et $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une suite de sous-tribus de $\mathcal{F}$. On suppose que $\mathbb{E}\left[X_n|\mathcal{F}_n\right]$ converge en probabilité vers 0.

1. Montrer que X_n converge en probabilité vers 0.
2. Montrer que la réciproque est fausse.

Solution de l'exercice 4

1. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'événement $\left\{\mathbb{E}\left[X_n|\mathcal{F}_n\right] > \frac{\varepsilon^2}{2}\right\}$. Alors par hypothèse $\mathbb{P}\left(A_n\right) \to 0$ quand $n \to +\infty$, donc $\mathbb{P}\left(A_n\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour n assez grand. De plus, on a
$$\mathbb{E}\left[X_n \mathbb{1}_{A_n^c}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_n|\mathcal{F}_n\right]\mathbb{1}_{A_n^c}\right] \leq \frac{\varepsilon^2}{2},$$
donc d'après l'inégalité de Markov,
$$\mathbb{P}\left(X_n \geq \varepsilon \text{ et } A_n^c\right) \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[X_n\mathbb{1}_{A_n^c}\right] \leq \frac{\varepsilon}{2},$$
d'où finalement
$$\mathbb{P}\left(X_n \geq \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(A_n\right) + \mathbb{P}\left(X_n \geq \varepsilon \text{ et } A_n^c\right) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
pour n assez grand. Comme c'est vrai pour tout ε, on en déduit le résultat.
2. Il suffit de prendre $\mathcal{F}_n = \{\varnothing,\Omega\}$ et (X_n) une suite qui converge en probabilité vers 0 mais pas dans L^1. Par exemple, on peut prendre $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ et $\mathbb{P}(X_n = n^2) = \frac{1}{n}$.

Pour la question 1, un autre solution consiste à remplacer X_n par $\max(X_n, 1)$. En effet, montrer que X_n tend vers 0 en proba revient à montrer que $\max(X_n, 1)$ tend vers 0 en proba. De plus, les variables $\mathbb{E}\left[\max(X_n, 1)|\mathcal{F}_n\right]$ sont bornées par 1 et tendent vers 0 en proba, donc elles tendent vers 0 dans L^1, donc

$$\mathbb{E}\left[\max(X_n, 1)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\max(X_n, 1)|\mathcal{F}_n\right]\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On a donc $\max(X_n, 1) \to 0$ dans L^1, et donc aussi en proba.

Exercice 5 (Calculs moins gentils)
On se donne deux réels $a, b > 0$, et (X, Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}^+$ dont la loi est caractérisée par

$$\mathbb{P}(X = n, Y \leq t) \;=\; b \int_0^t \frac{(ay)^n}{n!} \exp(-(a + b)y) \underset{\cdot}{\mathrm{y}}.$$

Déterminer $\mathbb{E}[h(Y)|X = n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute fonction $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mesurable telle que $h(Y)$ soit intégrable, puis $\mathbb{E}[\frac{Y}{X+1}]$. Calculer ensuite $\mathbb{P}\left(X = n|Y\right)$ et enfin $\mathbb{E}[X|Y]$.

Solution de l'exercice 5

Pour tout $n \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}(X = n) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(X = n, Y \leq t) = b \int_0^\infty \frac{(ay)^n}{n!} \exp(-(a + b)y) \underset{\cdot}{\mathrm{y}} = \frac{b}{a + b} \left(\frac{a}{a + b}\right)^n > 0.$$

Donc, puisque $P(X = n) > 0$,

$$\mathbb{E}[h(Y)|X = n] = \frac{\mathbb{E}[h(Y)\mathbb{1}_{X=n}]}{\mathbb{P}(X = n)}\,.$$

On remarque que

$$\mathbb{E}[h(Y)\mathbb{1}_{X=n}] \;=\; b \int_0^\infty h(y)\frac{(ay)^n}{n!} \exp(-(a + b)y) \underset{\cdot}{\mathrm{y}}.$$

Pour justifier cette égalité assez intuitive, on peut la vérifier sur une fonction indicatrice d'un intervalle, puis l'étendre aux fonctions en escalier par linéarité de l'intégrale, puis aux fonctions mesurables positives par convergence monotone et enfin à une fonction mesurable quelconque en la décomposant selon ses parties positives et négatives. On obtient:

$$\mathbb{E}[h(Y)|X = n] = \frac{\mathbb{E}[h(Y)\mathbb{1}_{X=n}]}{\mathbb{P}(X = n)} = (a + b)^{n+1} \int_0^\infty h(y)\frac{y^n}{n!} \exp(-(a + b)y) \underset{\cdot}{\mathrm{y}} := \phi(n),$$

et par définition

$$\mathbb{E}[h(Y)|X] = \phi(X)\,.$$

En particulier,

$$\mathbb{E}[Y|X = n] = (a + b)^{n+1} \int_0^\infty \frac{y^{n+1}}{n!} \exp(-(a + b)y) \underset{\cdot}{\mathrm{y}} = \frac{n + 1}{a + b}.$$

On a ensuite

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\frac{Y}{X+1}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\frac{Y}{X+1}\Big|X\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{1}{X+1}\mathbb{E}\left[Y|X\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\mathbb{E}\left[Y|X=n\right]\mathbb{1}_{\{X=n\}}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\mathbb{E}[Y|X=n]\mathbb{P}(X=n) \\
&= \frac{1}{a+b}\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=n) \;=\; \frac{1}{a+b}.
\end{aligned}
$$

Puis, pour toute fonction h mesurable telle que $h(Y)$ soit intégrable, on a

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[h(Y)] &= \sum_{n=0}^{\infty} b\int_0^{\infty} h(y)\frac{(ay)^n}{n!}\exp(-(a+b)y)\,\underset{\cdot}{\mathrm{y}} \\
&= b\int_0^{\infty} h(y)\exp(-by)\,\underset{\cdot}{\mathrm{y}},
\end{aligned}
$$

donc la densité de la loi de Y est la fonction

$$q(y) = be^{-by}\mathbb{1}_{\{y>0\}}.$$

Ainsi, pour toute fonction h bornée,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X=n}h(Y)\right] &= b\int_0^{\infty} h(y)\frac{(ay)^n}{n!}\exp(-(a+b)y)\,\underset{\cdot}{\mathrm{y}} \\
&= \int_0^{\infty} h(y)q(y)\frac{(ay)^n}{n!}\exp(-ay)\,\underset{\cdot}{\mathrm{y}} \\
&= \mathbb{E}\left[h(Y)\frac{(aY)^n}{n!}\exp(-aY)\right].
\end{aligned}
$$

Cela implique que

$$\mathbb{P}\left(X=n|Y\right) = \frac{(aY)^n}{n!}\exp(-aY).$$

On en déduit finalement

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X|Y] &= \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}\left(X=n|Y\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(aY)^n}{(n-1)!}\exp(-aY) \\
&= aY.
\end{aligned}
$$

Exercice 6 (Espérance conditionnelle et positivité)
Soit X une variable aléatoire positive sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Montrer que

$\{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] > 0]\}$ est le plus petit ensemble $\mathcal{G}$-mesurable (aux ensembles négligeables près) qui contient $\{X > 0\}$.

Solution de l'exercice 6

La variable aléatoire $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ est par définition $\mathcal{G}$-mesurable, et $]0, +\infty[$ est un borélien, donc $\{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] > 0\}$ est un ensemble $\mathcal{G}$-mesurable. De plus, par définition de l'espérance conditionnelle,

$$\mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]=0}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\,\mathbb{1}_{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]=0}\right] = 0.$$

Or $X\mathbb{1}_{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]=0} \geq 0$ p.s., donc $X\mathbb{1}_{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]=0} = 0$ p.s.. Cela signifie que

$$\{X > 0\} \subset \{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] > 0\}$$

à un ensemble négligeable près.

D'autre part, soit A un ensemble $\mathcal{G}$-mesurable contenant $\{X > 0\}$. Alors on a $X = 0$ p.s. sur A^c. Toujours par définition de l'espérance conditionnelle on a donc

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\,\mathbb{1}_{A^c}] = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{A^c}] = 0.$$

De même $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \geq 0$, donc sur A^c on a $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = 0$ p.s., soit $\{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] > 0\} \subset A$ à un ensemble négligeable près.

Exercice 7 Soit X une variable intégrable sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Soit Y une v.a. $\mathcal{G}$-mesurable, on veut montrer que $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = Y$. Montrer que si Π est un ensemble de parties de Ω qui contient Ω, stable par intersections finies et dont la tribu engendrée est $\mathcal{G}$, il suffit de montrer

$$\forall \pi \in \Pi\ ,\ \mathbb{E}[X\mathbb{1}_\pi] = \mathbb{E}[Y\mathbb{1}_\pi].$$

Solution de l'exercice 7

C'est une application du lemme de classe monotone : en effet, il est facile de vérifier que l'ensemble des $A \in \mathcal{G}$ tels que $\mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[Y\mathbb{1}_A]$ est une classe monotone, donc contient la classe monotone engendrée par Π, qui est $\mathcal{G}$ d'après le lemme de classe monotone.

Exercice 8 (Indépendance conditionnelle)
On dit que deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans un espace $(E, \mathcal{E})$ sont indépendantes conditionnellement à $\mathcal{G}$ si pour toutes fonctions f et g de E dans $\mathbb{R}^+$ mesurables,

$$\mathbb{E}[f(X)\,g(Y)|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[f(X)|\mathcal{G}]\,\mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}].$$

1. Que signifie ceci si $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$? Si $\mathcal{G} = \mathcal{E}$?

2. Montrer que la définition précédente équivaut à : pour toute variable aléatoire Z positive $\mathcal{G}$-mesurable, pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ mesurables,

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)Z] = \mathbb{E}[f(X)Z\mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}]],$$

et aussi à: pour toute fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ mesurable,

$$\mathbb{E}[g(Y)|\sigma(\mathcal{G}, X)] = \mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}].$$

Solution de l'exercice 8

1. Si $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$, l'egalité s'écrit

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\,\mathbb{E}[g(Y)]$$

pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ mesurables, c'est à dire que X et Y sont indépendantes. Si $\mathcal{G} = \mathcal{E}$, l'égalité est triviale et on ne peut rien dire sur les variables X et Y.

2. On suppose que pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ mesurables,

$$\mathbb{E}\left[f(X)g(Y)|\mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[f(X)|\mathcal{G}\right]\mathbb{E}\left[g(Y)|\mathcal{G}\right].$$

Soit Z une variable aléatoire $\mathcal{G}$-mesurable positive. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[f(X)g(Y)Z\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[f(X)g(Y)|\mathcal{G}\right]Z\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[f(X)|\mathcal{G}\right]\mathbb{E}\left[g(Y)|\mathcal{G}\right]Z\right]\\ &= \mathbb{E}[f(X)\mathbb{E}\left[g(Y)|\mathcal{G}\right]Z],\end{aligned}$$

car $\mathbb{E}\left[g(Y)|\mathcal{G}\right]Z$ est $\mathcal{G}$-mesurable. Réciproquement, on suppose que pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ mesurables, et pour toute variable aléatoire $\mathcal{G}$-mesurable positive Z,

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)Z] = \mathbb{E}[f(X)\mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}]Z].$$

Alors comme $Z\mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}]$ est $\mathcal{G}$-mesurable positive, on a

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)Z] = \mathbb{E}[f(X)\mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}]Z] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X)|\mathcal{G}]\mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}]Z],$$

et par la propriété caractéristique de l'espérance conditionnelle, comme $\mathbb{E}[f(X)|\mathcal{G}]\mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}]$ est $\mathcal{G}$-mesurable, on obtient

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[f(X)|\mathcal{G}]\mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}].$$

Pour la seconde équivalence, supposons X et Y indépendantes conditionnellement à $\mathcal{G}$. On veut montrer que pour tout $A \in \sigma(\mathcal{G}, X)$, on a

$$\mathbb{E}\left[g(Y)\mathbb{1}_A\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[g(Y)|\mathcal{G}\right]\mathbb{1}_A\right].$$

D'après l'exercice précédent, il suffit de le montrer pour des A de la forme $X^{-1}(B) \cap G$. avec $G \in \mathcal{G}$ et $B \in \mathcal{E}$, ce qui est un cas particulier de l'équivalence précédente avec $f(X) = \mathbb{1}_{X\in B}$ et $Z = \mathbb{1}_G$. Pour la réciproque, si $\mathbb{E}[g(Y)|\sigma(\mathcal{G}, X)] = \mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}]$ pour toute fonction g mesurable positive, alors pour toutes g mesurable positive et U variable $(\sigma(\mathcal{G}, X))$-mesurable :

$$\mathbb{E}\left[g(Y)U\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[g(Y)|\mathcal{G}\right]U\right],$$

et il suffit d'appliquer ce résultat aux variables U de la forme $Zf(X)$ avec f mesurable positive et Z une variable $\mathcal{G}$-mesurable.