Processus Stochastiques Rémy Mahfouf
ENS Paris, 2021-2022 Bureau V2
remy.mahfouf@ens.fr

TD 4 : Espérance conditionnelle et martingales

Vendredi 15 Octobre

Exercice 1 (Une question pas si facile)
On considère X une variable aléatoire intégrable et h une fonction telle que $h(X)$ est intégrables. Calculez $\mathbb{E}[h(X)||X|]$. On traitera d'abord le cas où X est symétrique, le cas où X admet une densité puis le cas général.

Solution de l'exercice 1

- On commence par le cas X symétrique. En toute généralité, on a

$$h(X) = \frac{h(|X| + h(-|X|)}{2} + \mathbb{1}_{X\geq 0}\frac{h(|X|) - h(-|X|)}{2} + \mathbb{1}_{X\leq 0}\frac{h(|-X|) - h(|X|)}{2}.$$

  L'équation précédente et la symétrie (après changement de variable $Z \sim -X$) montrent que pour g mesurable bornée, on a $\mathbb{E}[h(X)g(|X|)] = \mathbb{E}[\frac{h(|X|+h(-|X|)}{2}g(|X|)]$, ce qui assure que $\mathbb{E}[h(X)||X|] = \frac{h(|X|+h(-|X|)}{2}$.

- Dans le cas où X admet une densité f_{den} par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, dont on note f_{den}^{+} et f_{den}^{-} les restrictions respectives sur $\mathbb{R}^-$ et $\mathbb{R}^+$ (on se place dans le ca simple ou il n'y a pas de masse en 0). On voit que $|X|$ admet une densité en $x \in \mathbb{R}^+$ qui vaut $f_{abs}(x) := f_{den}^{+}(x) + f_{den}^{-}(-x)$. Pour g mesurable bornée, on a

$$\mathbb{E}[h(X)g(|X|)] = \int_{-\infty}^{0} h(x)g(|x|)f_{den}^{-}(x)dx + \int_{0}^{\infty} h(x)g(|x|)f_{den}^{+}(x)dx$$

$$\mathbb{E}[h(X)g(|X|)] = \int_{0}^{\infty} h(-|x|)g(|x|)(1-p(|x|)) + h(|x|)g(|x|)p(|x|))dx,$$

  avec $p(x) = \frac{f_{den}^{+}(x)}{f_{den}^{-}(x)+f_{den}^{+}(x)}$ pour $x > 0$ et $p(0) = 1$. Finalement, cela permet de conclure que $\mathbb{E}[h(X)||X|] = h(|X|)p(|X|) + (1-p(|X|))h(-|X|)$.

- Dans le cas général, on remarque qu'en définissant les mesures $\mu^- := \mathbb{P} \circ X_-^{-1}$, $\mu^+ := \mathbb{P} \circ X_+^{-1}$ et $\mu := \mathbb{P} \circ |X|^{-1}$, on a $\mu^{\pm} \ll \mu$. On note f^- et f^+ les dérivées de Radon-Nikodym respectives de μ^- et μ^+ par rapport à μ. Pour $x > 0$, on pose $p(x) := \frac{f^+(x)}{f^-(x)+f^+(x)}$ puis $p(0) = 1$. Le même calcul qu'avec le cas précédent assure que l'on a à nouveau $\mathbb{E}[h(X)||X|] = h(|X|)p(|X|) + (1-p(|X|))h(-|X|)$.

Exercice 2
On se donne deux variables aléatoires réelles positives X et Y, et on suppose que $\mathbb{E}[X|Y] = Y$ et $\mathbb{E}[Y|X] = X$.

1. Montrer que si X et Y sont dans L^2, alors $X = Y$ p.s..

2. On se place maintenant dans le cas général. En étudiant des quantités de la forme $\mathbb{E}\left[Y\mathbb{1}_{X\leq a}\right]$, montrer que $X = Y$ p.s..

Solution de l'exercice 2

1. On calcule
$$\mathbb{E}\left[(X-Y)^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] + \mathbb{E}\left[Y^2\right] - 2E\left[XY\right].$$
Or $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}\left[X\mathbb{E}[Y|X]\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right]$ et de même $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}\left[Y^2\right]$, donc $\mathbb{E}\left[(X-Y)^2\right] = 0$ et $X = Y$ p.s..

   On peut aussi le voir autrement en utilisant l'interprétation de l'espérance conditionnelle dans L^2: il existe deux projections orthogonales p et q telles que $p(X) = Y$ et $q(Y) = X$, donc
$$\|X\| = \|q(Y)\| \leq \|Y\|$$
et de même dans l'autre sens. On a donc égalité, donc $Y \in \mathrm{Im}(q)$, donc $X = q(Y) = Y$.

2. Soit $a \geq 0$. L'égalité
$$\mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{X\leq a}\right] = \mathbb{E}\left[Y\mathbb{1}_{X\leq a}\right]$$
est une conséquence immédiate de la définition de l'espérance conditionnelle. Notons que le membre de gauche est fini, donc le membre de droite l'est aussi. L'égalité se réécrit
$$\mathbb{E}\left[(X-Y)\mathbb{1}_{X\leq a}\right] = 0,$$
où la variable $(X-Y)\mathbb{1}_{X\leq a}$ est intégrable car c'est la différence de deux variables intégrables. De manière symétrique, on obtient
$$\mathbb{E}\left[(X-Y)\mathbb{1}_{Y\leq a}\right] = 0$$
donc, en faisant la différence des deux,
$$\mathbb{E}\left[(X-Y)\left(\mathbb{1}_{Y\leq a} - \mathbb{1}_{X\leq a}\right)\right] = 0.$$
Or, si $\mathbb{1}_{Y\leq a} - \mathbb{1}_{X\leq a} > 0$ alors $Y \leq a < X$, et si $\mathbb{1}_{Y\leq a} - \mathbb{1}_{X\leq a} < 0$ alors $Y > a \geq X$. La variable $(X-Y)\left(\mathbb{1}_{Y\leq a} - \mathbb{1}_{X\leq a}\right)$ est donc positive. Comme elle est d'espérance nulle, elle est nulle p.s.. On en déduit
$$\mathbb{1}_{Y\leq a} = \mathbb{1}_{X\leq a} \quad \text{p.s.}.$$
Presque sûrement, ceci est vrai pour tout a rationnel positif, donc presque sûrement il n'existe pas de a rationnel tel que $X \leq a < Y$, d'où $X \geq Y$ p.s.. On a de même l'inégalité inverse, d'où $X = Y$ p.s..

Exercice 3 (Convergence L^2 des martingales rétrogrades)
Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$, avec $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$. Soit X une variable aléatoire de carré intégrable.

1. Montrer que les variables $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{n+1}]$ sont orthogonales dans L^2, et que la série
$$\sum_{n\geq 0}(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{n+1}])$$
converge dans L^2.

2. Montrer que si $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{n\geq 0}\mathcal{F}_n$, on a
$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\infty] \quad \text{dans } L^2.$$

Solution de l'exercice 3

1. On calcule, pour $m > n$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{n+1}] - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n])\,(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{m+1}] - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_m])\right] \\
&\quad = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{n+1}]\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{m+1}] - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{n+1}]\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_m] - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_{m+1}] + \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_m]\right] \\
&\quad = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{m+1}]^2 - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_m]^2 - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{m+1}]^2 + \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_m]^2\right] \\
&\quad = 0,
\end{aligned}$$

ce qui montre que la famille $(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{n+1}])_{n\geq 0}$ est orthogonale. De plus, pour $m = n$, on a

$$\mathbb{E}\left[(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{n+1}] - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n])^2\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]^2 - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{n+1}]^2\right],$$

donc par téléscopage $\sum \mathbb{E}\left[(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{n+1}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n))^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}_0\right]^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] < +\infty$, d'où la convergence de la série dans L^2, par critère de Cauchy dans L^2.

2. On déduit de la question précédente que $\mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}_n\right]$ converge, on note Y la variable aléatoire limite. On n'a plus qu'à montrer que $Y = \mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}_\infty\right]$. Soit Z une variable $\mathcal{F}_\infty$-mesurable bornée. En particulier, pour tout n, elle est $\mathcal{F}_n$-mesurable donc

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}_n\right]Z\right] = \mathbb{E}\left[XZ\right].$$

Quand n tend vers $+\infty$, le membre de gauche tend vers $\mathbb{E}[YZ]$ (en utilisant la convergence de $\mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}_n\right]$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz), d'où $\mathbb{E}[YZ] = \mathbb{E}[XZ]$, d'où $Y = \mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}_\infty\right]$.

Il est aussi possible de résoudre entièrement l'exercice en utilisant seulement le fait que L^2 est un espace de Hilbert. On vérifie facilement que le sous-espace des variables $\mathcal{F}_\infty$-mesurables est l'intersection décroissantes des sous-espaces des variables $\mathcal{F}_n$-mesurables. Il suffit donc de montrer que dans un espace de Hilbert, les projections orthogonales sur une suite décroissante de sous-espaces fermés convergent vers la projection orthogonale sur l'intersection de ces sous-espaces.

Exercice 4 (Vrai ou faux)
Soit (S_n) une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, S_1, \ldots, S_n)$. Lesquelles des variables suivantes sont des temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_n)$?

1. $T_1 = \min\{n \geq 0 | S_n = 2021\}$,
2. $T_2 = \min\{n \geq 2021 | S_n = S_{n-2021}\}$,
3. $T_3 = \min\{n \geq 0 | S_n = S_{n+2021}\}$,
4. $T_4 = \min\{n \geq T_1 | S_n = 0\}$,
5. $T_5 = \max\{n \in [\![0, 2021]\!] | S_n = 0\}$,
6. $T_6 = \min\{n \in [\![0, 2021]\!] | \forall m \in [\![0, 2021]\!], S_m \leq S_n\}$.

Solution de l'exercice 4

Les temps T_1, T_2 et T_4 sont des temps d'arrêts, car à chaque fois l'événement $\{T \leq n\}$ ne dépend que de $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$. En revanche, T_3, T_5 et T_6 n'en sont pas puisque les événements $\{T_3 = 0\}$, $\{T_5 = 0\}$ et $\{T_6 = 0\}$ ne sont pas $\mathcal{F}_0$-mesurables.

Exercice 5 (Ce qui peut arriver, arrivera)
Soit T un temps d'arrêt pour une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $n \geq 0$, on a p.s.

$$\mathbb{P}(T \leq n + n_0 | \mathcal{F}_n) > \varepsilon.$$

Montrer que T est fini presque sûrement et que $\mathbb{E}[T] < +\infty$.

Solution de l'exercice 5

On montre par récurrence sur k que pour tout $k \geq 0$:

$$\mathbb{P}(T \geq kn_0) \leq (1-\varepsilon)^k.$$

C'est vrai pour $k = 0$ et on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T \geq (k+1)n_0) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{T\geq kn_0}\mathbb{1}_{T\geq (k+1)n_0}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{T\geq kn_0}\mathbb{P}\left(T \geq kn_0 + n_0 \mid \mathcal{F}_{kn_0}\right)\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{T\geq kn_0}(1-\varepsilon)\right] \\
&\leq (1-\varepsilon)^{k+1},
\end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence. On en déduit aisément que $\mathbb{E}[T] < +\infty$ et en particulier que T est presque sûrement fini.

Exercice 6 (À la pêche aux martingales)
Soit (S_n) une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$, et $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \cdots S_n)$.

1. Montrer que (S_n) est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.
2. Montrer que $(S_n^2 - n)$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.
3. Montrer que $(S_n^3 - 3nS_n)$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.
4. Soit $P(X, Y)$ un polynôme à deux variables. Montrer que $(P(S_n, n))$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$ si pour tous $s, n \in \mathbb{Z}$, on a
$$P(s+1, n+1) - 2P(s,n) + P(s-1, n+1) = 0.$$
5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(\alpha S_n - \beta n)$ est une martingale pour $(\mathcal{F}_n)$.

Solution de l'exercice 6

On note $X_n = S_n - S_{n-1}$ les pas de la marche aléatoire. Tous les processus considérés dans la suite sont des fonctions mesurables de n et de S_n, donc sont $(\mathcal{F}_n)$-adaptés. De plus, au temps n, ils sont toujours bornés par une fonction de n (n pour le premier, $n^2 + n$ pour le second...), donc intégrables.

1. On a
$$\mathbb{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_n + X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = S_n + \mathbb{E}[X_{n+1}] = S_n$$
par indépendance des accroissements.
2. On a
$$\mathbb{E}\left[S_{n+1}^2|\mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[S_n^2|\mathcal{F}_n\right] + 2S_n\mathbb{E}\left[X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] + \mathbb{E}\left[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n\right] = S_n^2 + 1.$$
On a donc $\mathbb{E}\left[S_{n+1}^2 - (n+1)|\mathcal{F}_n\right] = S_n^2 - n$, donc on a bien une martingale.
3. Le calcul est similaire :
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(S_{n+1})^3 - 3(n+1)S_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] &= S_n^3 + 3S_n^2\mathbb{E}\left[X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] + 3S_n\mathbb{E}\left[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n\right] + \mathbb{E}\left[X_{n+1}^3|\mathcal{F}_n\right] \\
&- 3(n+1)\mathbb{E}\left[S_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] \\
&= S_n^3 + 3S_n - 3(n+1)S_n \\
&= S_n^3 - 3nS_n.
\end{aligned}$$

4. On calcule
$$\mathbb{E}\left[P(S_{n+1}, n+1)|\mathcal{F}_n\right] = \frac{1}{2}P(S_n+1, n+1) + \frac{1}{2}P(S_n-1, n+1).$$
Il suffit donc de $P(X+1, n+1) - 2P(X, n) + P(X-1, n+1) = 0$.

5. On calcule
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{\alpha S_{n+1}}|\mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[e^{\alpha S_n}e^{\alpha X_{n+1}}|\mathcal{F}_n\right] \\ &= e^{\alpha S_n}\mathbb{E}\left[e^{\alpha X_{n+1}}|\mathcal{F}_n\right] \\ &= \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}e^{\alpha S_n}.\end{aligned}$$
Il faut donc choisir $\beta = \ln(\mathrm{ch}(\alpha))$.

Exercice 7 (Temps de sortie)
Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$. Soient $a, b \geq 0$ et
$$T = \min\{n \in \mathbb{N}, S_n = -a \text{ ou } S_n = b\}.$$
On pourra admettre dans un premier temps que $T < +\infty$ p.s. (c'est une conséquence de l'exercice 4).

1. En utilisant la première martingale de l'exercice précédent et le théorème d'arrêt, montrer que
$$\mathbb{P}(S_T = b) = \frac{a}{a+b}.$$
2. En utilisant la seconde martingale de l'exercice précédent et le théorème d'arrêt, montrer que
$$\mathbb{E}[T] = ab.$$

Exercice 8 (Martingales et marche biaisée)
Soit $p \neq \frac{1}{2}$ et $(S_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire biaisée sur $\mathbb{Z}$, i.e. $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ avec X_i i.i.d. et $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p$.

1. Trouver α tel que α^{S_n} soit une martingale.
2. Soient a, b et T comme dans l'exercice précédent. Calculer $\mathbb{P}(S_T = b)$.

Exercice 9 (Un contre-exemple)
Trouver un processus $(M_n)_{n\geq 0}$ avec $E[|M_n|] < +\infty$ pour tout $n \geq 0$ et tel que $E[M_{n+1} \mid M_n] = M_n$ pour tout $n \geq 0$, mais sans que M soit une martingale.

Solution de l'exercice 7

On considère une marche aléatoire simple démarrant de 0 avec des pas indépendants ± 1, mais au premier retour en 0, la marche est obligée de faire le même pas que son tout premier. Pour $n \geq 1$, on a alors
$$\mathbb{E}\left[M_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] = \begin{cases} M_n & \text{si } M_n \neq 0, \\ -1 & \text{si } M_n = 0 \text{ et } M_1 = -1, \\ 1 & \text{si } M_n = 0 \text{ et } M_1 = 1. \end{cases}$$
En particulier, $\mathbb{E}\left[M_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] \neq M_n$ si $M_n = 0$, donc M n'est pas une martingale.

Exercice 10 (Une fausse blague)
Un mathématicien, un économiste et un trader discutent dans un bar. L'économiste dit :
"La valeur en euros d'un dollar au cours du temps est une martingale ! Sinon, il serait possible de gagner de l'argent en moyenne, en achetant et vendant des dollars au bon moment !"
Le mathématicien répond :
"Mais si cela est vrai, d'après l'inégalité de Jensen pour l'espérance conditionnelle, la valeur en dollars d'un euro est une sous-martingale !"
Le trader ne dit rien, réfléchit quelques secondes, puis s'enfuit en courant pour aller acheter des euros. Qu'en pensez-vous ?

<u>*Solution de l'exercice 8*</u>

Pour commencer, le mathématicien a bien sûr raison. Soit M une martingale strictement positive pour une filtration $(\mathcal{F}_n)$. La fonction inverse est convexe, donc l'inégalité de Jensen conditionnelle donne

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1}^{-1}|\mathcal{F}_n\right] \geq \mathbb{E}\left[M_{n+1}|\mathcal{F}_n\right]^{-1} = M_n^{-1},$$

donc $(M_n^{-1})_{n\geq 0}$ est bien une sous-martingale. De plus, si M_{n+1} n'est pas $\mathcal{F}_n$-mesurable (ce qui doit être le cas en pratique), alors l'inégalité est stricte. Enfin, si M_n est la valeur en euros d'un dollar, alors M_n^{-1} est la valeur en dollars d'un euro, donc le cours euro/dollar serait une sous-martingale stricte.

Le raisonnement du trader est le suivant. Si le cours euro/dollar est une sous-martingale stricte, alors en achetant des euros aujourd'hui pour le revendre demain, l'espérance du gain en dollar est strictement positive. Il faut donc le faire ! D'un autre côté, cette réaction semble bizarre : elle suggère qu'on aurait systématiquement intérêt à acheter des euros pour les vendre le lendemain, alors que le même raisonnement donnerait l'inverse si on échangeait les rôles de l'euro et du dollar. C'est donc que l'affirmation de l'économiste doit être fausse : le taux euro/dollar et le taux dollar/euro seraient tous les deux des sous-martingales !

Cela signifierait qu'en achetant un jour des euros et en les revendant le lendemain, l'espérance de gains en dollars serait positive. On a donc à nouveau l'impression de pouvoir gagner à tout les coups ! Cependant, le cas où l'on gagne des dollars est le cas où le cours du dollar a baissé, donc si on se retrouve avec plus de dollars, alors chacun de ces dollars vaut moins qu'au début. On a donc une espérance de gains en dollars positive, mais une fois les dollars convertis en marchandises, l'espérance de gain devrait devenir nulle.