Processus Stochastiques
ENS Paris, 2020-2021

Rémy Mahfouf
Bureau V2
remy.mahfouf@ens.fr

TD 5 : Martingales et théorèmes d'arrêts

Vendredi 16 Octobre

Exercice 1 (Temps de sortie)
Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$. Soient $a, b \geq 0$ et

$$T = \min\{n \in \mathbb{N}, S_n = -a \text{ ou } S_n = b\}.$$

On pourra admettre dans un premier temps que $T < +\infty$ p.s. (c'est une conséquence de l'exercice 5 de la semaine dernière).

1. En utilisant la première martingale de l'exercice 6 du TD précédent et le théorème d'arrêt, montrer que
$$\mathbb{P}(S_T = b) = \frac{a}{a+b}.$$
2. En utilisant la seconde martingale de l'exercice 6 du TD précédent et le théorème d'arrêt, montrer que
$$\mathbb{E}[T] = ab.$$

Solution de l'exercice 1

1. Soit $t > 0$. Alors $T \wedge t$ est un temps d'arrêt borné, auquel on peut appliquer le théorème d'arrêt :
$$\mathbb{E}[S_{T\wedge t}] = \mathbb{E}[S_0] = 0.$$
De plus, $T < +\infty$ p.s. donc $S_{T\wedge t}$ converge p.s. vers S_T, et on a $-a \leq S_{T\wedge t} \leq b$ pour tout t. Par convergence dominée, on a donc
$$\mathbb{E}[S_T] = \lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}[S_{T\wedge t}] = 0.$$
D'autre part, en notant $p = \mathbb{P}(S_T = b)$, on a
$$0 = \mathbb{E}[S_T] = (1-p)(-a) + pb,$$
d'où $p = \frac{a}{a+b}$.
2. Soit $t > 0$. En appliquant le théorème d'arrêt à $S_n^2 - n$ et au temps d'arrêt $T \wedge t$, on obtient
$$\mathbb{E}[T \wedge t] = \mathbb{E}[S_{T\wedge t}^2].$$
Comme dans la première question, en utilisant $T < +\infty$ p.s., le membre de gauche converge vers $\mathbb{E}[T]$ par convergence monotone et le membre de droite vers $\mathbb{E}[S_T^2]$ par convergence dominée. On a donc, en utilisant la première question :
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T] &= \mathbb{E}[S_T^2] \\ &= \frac{b}{a+b}(-a)^2 + \frac{a}{a+b}b^2 \\ &= ab. \end{aligned}$$

Si vous n'êtes pas fatigués par les calculs : en utilisant la troisième martingale de l'exercice précédent (ainsi que les deux questions précédentes), on peut calculer

$$\mathbb{E}[T|S_T = b] = \frac{1}{3}\left(2ab + b^2\right).$$

Exercice 2 (Martingales et marche biaisée)
Soit $p \neq \frac{1}{2}$ et $(S_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire biaisée sur $\mathbb{Z}$, i.e. $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ avec X_i i.i.d. et $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p$.

1. Trouver α tel que α^{S_n} soit une martingale.

2. Soient a, b et T comme dans l'exercice précédent. Calculer $\mathbb{P}(S_T = b)$.

3. En déduire la loi de $\min\{S_n|n \geq 0\}$.

Solution de l'exercice 2

1. On a $\mathbb{E}[\alpha^{S_{n+1}}|\mathcal{F}_n] = \alpha^{S_n}\mathbb{E}[\alpha^{X_{n+1}}] = \alpha^{S_n}\left(p\alpha + (1-p)\alpha^{-1}\right)$. Le processus (α^{S_n}) est donc une martingale ssi
$$p\alpha + (1-p)\alpha^{-1} = 1,$$
ce qui est une équation de degré 2 en α. En la résolvant, on obtient $\alpha = 1$ (ce qui n'est pas très intéressant) ou $\alpha = \frac{1-p}{p}$.

2. En reprenant exactement le raisonnement de l'exercice précédent (question 1), on trouve
$$\mathbb{P}(S_T = b) = \frac{1 - \alpha^a}{1 - \alpha^{a+b}}$$
avec $\alpha = \frac{1-p}{p}$.

3. Notons que si par exemple $p > \frac{1}{2}$, alors $\alpha < 1$ donc, en faisant tendre b vers $+\infty$, on obtient
$$\mathbb{P}\left(T_{-a} < +\infty\right) = 1 - \alpha^a = 1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^a$$
pour $a \geq 0$, où $T_{-a} = \min\{n \geq 0|S_n = -a\}$. On en déduit que $-\min\{S_n|n \geq 0\}$ suit une loi géométrique de paramètre $\alpha = \frac{1-p}{p}$.

Exercice 3 (Exemples et contre-exemples)

1. Trouver un exemple de martingale qui n'est pas bornée dans L^1.

2. Trouver un exemple de martingale qui converge p.s. mais n'est pas bornée dans L^1.

3. Trouver un exemple de martingale qui converge p.s. vers $+\infty$.

4. Trouver un exemple de martingale bornée dans L^1 mais qui ne converge pas dans L^1.

Solution de l'exercice 3

1. La marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$.

2. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ des variables indépendantes vérifiant

$$\mathbb{P}(X_n = 100^n) = \mathbb{P}(X_n = -100^n) = \frac{1}{10^n}, \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{2}{10^n},$$

et $M_n = \sum_{i=1}^n X_i$ pour tout $n \geq 0$. On vérifie facilement que $\mathbb{E}[X_n] = 0$ pour tout n, donc M est une martingale. On a de plus $\sum_{n\geq 1} \frac{2}{10^n} < +\infty$, donc par Borel-Cantelli, presque sûrement, $X_n = 0$ pour n assez grand et (M_n) converge p.s. Enfin, pour tout n, si $X_n = 100^n$ alors $M_n \geq \frac{100^n}{2}$ donc

$$\mathbb{E}[|M_n|] \geq \frac{100^n}{2}\mathbb{P}\left(M_n \geq \frac{100^n}{2}\right) = \frac{100^n}{2}\mathbb{P}(X_n = 100^n) = \frac{10^n}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

3. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ des variables indépendantes vérifiant

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{n^2}{n^2+1} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(X_n = -n^2\right) = \frac{1}{n^2+1},$$

et $M_n = \sum_{i=1}^n X_i$. On vérifie facilement que $\mathbb{E}[X_n] = 0$ pour tout n, donc M est une martingale. On a de plus $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+1} < +\infty$, donc par Borel-Cantelli, presque sûrement, $X_n = 1$ pour n assez grand et $M_n \to +\infty$ p.s.

4. Soient $(X_i)_{i\geq 0}$ des variables i.i.d. avec $\mathbb{P}(X_i = 0) = \mathbb{P}(X_i = 2) = \frac{1}{2}$, et $M_n = \prod_{i=1}^n X_i$ pour tout $n \geq 0$. On a $\mathbb{E}[X_n] = 1$ pour tout n donc M est bien une martingale. De plus, p.s. il existe i tel que $X_i = 0$, donc $M_n = 0$ pour n assez grand, donc M converge p.s. vers 0, et M ne peut pas converger dans L^1 car $\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_0] = 1$ pour tout n. En revanche, on a $\mathbb{E}[|M_n|] = \mathbb{E}[M_n] = 1$ pour tout n, donc M est bien bornée dans L^1.

Exercice 4 (Urne de Polya)
À l'instant 0, une urne contient a boules blanches et $b = N_0 - a$ boules rouges. On tire une boule uniformément et on la remplace par deux boules de sa couleur, ce qui donne la composition de l'urne à l'instant 1. On répète ce procédé.

Pour $n \geq 1$, on note Y_n et $X_n = \frac{Y_n}{N_0+n}$ respectivement le nombre et la proportion de boules blanches dans l'urne à l'instant n. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$.

1. Donner $\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n + 1|\mathcal{F}_n)$ et $\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n|\mathcal{F}_n)$.

2. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale qui converge p.s. vers une variable aléatoire, que l'on note U, et montrer que pour tout $k \geq 1$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n^k] = \mathbb{E}[U^k]$.

3. *Cas* $a = b = 1$. Montrer que pour tout $n \geq 0$, Y_n suit une loi uniforme sur $\{1, ..., n+1\}$. En déduire la loi de U.

4. *Cas général.* On fixe $k \geq 1$. On pose pour tout $n \geq 1$:

$$Z_n = \frac{Y_n(Y_n+1)\ldots(Y_n+k-1)}{(N_0+n)(N_0+n+1)\ldots(N_0+n+k-1)}.$$

Montrer que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[U^k]$.

5. Montrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle bornée se développe en série entière sur $\mathbb{R}$ (on exhibera le développement en série entière). Expliquer pourquoi on a caractérisé la loi de U.

Solution de l'exercice 4

1. On a
$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n + 1|\mathcal{F}_n) \;=\; \mathbb{P}\left(\text{la } n^{\text{ième}} \text{ boule tirée est blanche}|\mathcal{F}_n\right) \;=\; X_n,$$
et de même
$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n|\mathcal{F}_n) \;=\; 1 - X_n\,.$$

2. Pour tout $n \geq 1$, la variable X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, $X_n \in [0,1]$ donc est intégrable et, d'après la question précédente,
$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \frac{Y_n+1}{N_0+n+1}X_n + \frac{Y_n}{N_0+n+1}(1-X_n) = \frac{X_n+Y_n}{N_0+n+1} = X_n\,,$$
donc $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale. Elle est de plus bornée dans L^∞, donc dans L^k pour tout k, donc elle converge p.s. et dans L^k pour tout k vers une variable U. On a donc bien
$$\mathbb{E}[X_n^k] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[U^k].$$

3. On raisonne par récurrence sur n. L'initialisation à $n = 0$ est immédiate. Soit $n \geq 1$ et supposons que la loi de Y_{n-1} est la loi uniforme sur $\{1,...,n\}$. Soit aussi $k \geq 2$. Alors
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_n = k) &= \mathbb{P}(Y_n = k \text{ et } Y_{n-1} = k) + \mathbb{P}(Y_n = k \text{ et } Y_{n-1} = k-1)\\
&= \mathbb{P}(Y_{n-1} = k)\mathbb{P}(Y_n = k|Y_{n-1} = k) + \mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1)\mathbb{P}(Y_n = k|Y_{n-1} = k-1)\\
&= \frac{\mathbb{P}(\text{la } n\text{-ième boule prise est rouge } |Y_{n-1} = k)}{n}\\
&\quad+\frac{\mathbb{P}(\text{la } n\text{-ième boule prise est blanche}|Y_{n-1} = k-1)}{n}\\
&= \frac{1}{n}\cdot\frac{n+1-k}{n+1} + \frac{1}{n}\cdot\frac{k-1}{n+1} = \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$
D'autre part,
$$\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(\text{les } n \text{ boules tirées sont rouges}) = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\cdots\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\,.$$
On en déduit que Y_n suit bien une loi uniforme sur $\{1,...,n+1\}$.

Il en découle que X_n suit une loi uniforme sur $\{1/(n+2), 2/(n+2), ..., (n+1)/(n+2)\}$ pour tout $n \geq 0$. Or (X_n) converge p.s. donc en loi vers U, donc U suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

4. Pour tout $n \geq 0$, la variable Z_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable et $Z_n \in [0,1]$ donc est intégrable, et
$$Z_{n+1} = \begin{cases} \frac{Y_n\dots(Y_n+k-1)}{(N_0+n+1)(N_0+n+2)\dots(N_0+n+k)} & \text{si } Y_{n+1} = Y_n\\ \frac{(Y_n+1)\dots(Y_n+k)}{(N_0+n+1)(N_0+n+2)\dots(N_0+n+k)} & \text{si } Y_{n+1} = Y_n+1\end{cases}$$
ou encore
$$Z_{n+1} = \begin{cases} Z_n\cdot\frac{N_0+n}{N_0+n+k} & \text{si } Y_{n+1} = Y_n\\ Z_n\cdot\frac{N_0+n}{N_0+n+k}\cdot\frac{Y_n+k}{Y_n} & \text{si } Y_{n+1} = Y_n+1\end{cases}\,.$$
Le calcul pour en déduire (en utilisant la question 1) que (Z_n) est bien une martingale est laissé en exercice.

En particulier, pour tout $n \geq 1$,
$$\mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}[Z_0] = \frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)}{N_0(N_0+1)\cdots(N_0+k-1)}$$

car $Y_0 = a$ (il y a a boules blanches à l'instant initial). De plus, on a $Y_n = Un + o(n)$ p.s. et, pour toute suite (y_n) et tout réel u tels que $y_n = un + o(n)$, on a

$$\frac{y_n(y_n+1)\dots(y_n+k-1)}{N_0+n(N_0+n+1)\dots(N_0+n+k-1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} u^k,$$

donc Z_n converge p.s. vers U^k. Comme $Z_n \in [0,1]$ pour tout n, on en déduit par convergence dominée que

$$\mathbb{E}[U^k] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}[Z_0] = \frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)}{(a+b)(a+b+1)\cdots(a+b+k-1)}.$$

5. Soit X une v.a. réelle bornée et $c > 0$ telle que $|X| \leq c$ p.s. Soit ϕ_X la fonction caractéristique de X, i.e., pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$. On a, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \mathbb{E}\left[\sum_{n\geq 0} \frac{(itX)^n}{n!}\right] = \sum_{n\geq 0} \frac{(it)^n}{n!}\mathbb{E}[X^n],$$

où l'interversion est justifiée par le théorème de Fubini :

$$\sum_{n\geq 0} \left|\frac{(it)^n}{n!}\right| \mathbb{E}[|X|^n] \leq \sum_{n\geq 0} \frac{|t|^n}{n!}c^n = e^{c|t|} < +\infty.$$

Comme U est à valeurs dans $[0,1]$, sa fonction caractéristique ϕ_U se développe en série entière sur $\mathbb{R}$ comme décrit ci-dessus. Les $\mathbb{E}[U^k]$ pour $k \geq 1$ décrivent donc complètement la fonction caractéristique de U, qui elle même caractérise la loi de U.

Exercice 5 (Processus de Galton–Watson surcritique)
Soit μ une loi sur $\mathbb{N}$ telle que $\sum_i i\mu(i) = m > 1$ et $\sum_i i^2\mu(i) < +\infty$. Soient $(Z_{n,i})_{n,i\in\mathbb{N}}$ des variables i.i.d. de loi μ. On définit le processus X par $X_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} Z_{n,i}.$$

1. Que peut décrire le processus X ?

2. On pose $p_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$ et $p = \mathbb{P}(\exists n, X_n = 0)$. Montrer une formule de récurrence de la forme $p_{n+1} = f(p_n)$, et en déduire que $p < 1$.

3. On pose $M_n = m^{-n}X_n$. Montrer que M est une martingale. En déduire que M_n converge p.s. vers une variable M_∞.

4. Trouver une relation de récurrence sur $\mathbb{E}[M_n^2]$, et en déduire que $M_n \to M_\infty$ dans L^2.

5. On note $q = \mathbb{P}(M_\infty = 0)$. Donner une équation sur q. En déduire que $q = p$. Qu'est-ce-que cela signifie sur la croissance de X_n ?