Processus Stochastiques Rémy Mahfouf
ENS Paris, 2021-2022 Bureau V2
remy.mahfouf@ens.fr

TD 6 : Martingales et théorèmes d'arrêts

Vendredi 29 Octobre

Exercice 1 (Processus de Galton–Watson surcritique)
Soit μ une loi sur $\mathbb{N}$ telle que $\sum_i i\mu(i) = m > 1$ et $\sum_i i^2\mu(i) < +\infty$. Soient $(Z_{n,i})_{n,i\in\mathbb{N}}$ des variables i.i.d. de loi μ. On définit le processus X par $X_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} Z_{n,i}.$$

1. Que peut décrire le processus X ?

2. On pose $p_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$ et $p = \mathbb{P}(\exists n, X_n = 0)$. Montrer une formule de récurrence de la forme $p_{n+1} = f(p_n)$, et en déduire que $p < 1$.

3. On pose $M_n = m^{-n}X_n$. Montrer que M est une martingale. En déduire que M_n converge p.s. vers une variable M_∞.

4. Trouver une relation de récurrence sur $\mathbb{E}[M_n^2]$, et en déduire que $M_n \to M_\infty$ dans L^2.

5. On note $q = \mathbb{P}(M_\infty = 0)$. Donner une équation sur q. En déduire que $q = p$. Qu'est-ce-que cela signifie sur la croissance de X_n ?

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

1. Supposons qu'une population évolue de la manière suivante : à chaque génération n, les individus se reproduisent indépendamment des générations précédentes et les uns des autres, de telle manière que le nombre d'enfants d'un individu a pour loi μ. Alors le processus X décrit le nombre d'individus à la génération n.

2. Dire que $X_{n+1} = 0$ revient à dire qu'il existe i tel que le premier individu a eu i enfants (ce qui arrive avec proba $\mu(i)$), et chacun de ces i enfants n'a pas de descendant à la génération n (ce qui arrive avec proba p_n pour chaque enfant). Par conséquent, on a

$$p_{n+1} = \sum_i \mu(i)p_n^i = f(p_n),$$

avec $f(x) = \sum_i \mu(i)x^i$. On sait de plus que $p = \lim_{n\to+\infty} p_n$, donc p est un point fixe de f. De plus, f est croissante (les $\mu(i)$ sont positifs), donc si p' est un point fixe de f, on a par récurrence $p_n \leq p'$ pour tout n, donc $p \leq p'$. On en déduit que p est le plus petit point fixe de f, donc montrer que $p < 1$ revient à montrer que f admet un point fixe strictement inférieur à 1. Or, on a $f(1) = 1$ et $f'(1) = m > 1$, donc $f(x) < x$ pour x assez proche de 1. Mais on a aussi $f(0) \geq 0$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires f admet un point fixe dans $[0, 1[$, donc $p < 1$.

3. Soit $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les $Z_{k,i}$ pour $k \leq n-1$. Alors X_n ne dépend que des $Z_{k,i}$ avec $k \leq n-1$ et $i \in \mathbb{N}$, donc X est $(\mathcal{F}_n)$-adapté, donc M aussi. De plus, comme M est positif, on peut faire le calcul suivant sans savoir M_n et M_{n+1} sont intégrables :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[M_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] &= m^{-(n+1)}\mathbb{E}\left[X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] \\ &= m^{-(n+1)}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{X_n} Z_{n,i}\Big|\mathcal{F}_n\right] \\ &= m^{-(n+1)}\sum_{i=1}^{X_n}\mathbb{E}\left[Z_{n,i}|\mathcal{F}_n\right] \\ &= m^{-(n+1)}\sum_{i=1}^{X_n} m \\ &= m^{-(n+1)} m X_n \\ &= M_n. \end{aligned}$$

En particulier, on en déduit que $\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_0] < +\infty$ pour tout n, et M est une martingale positive, donc elle converge p.s..

4. Notons σ^2 la variance de la loi μ. Pour tout n, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[M_{n+1}^2|\mathcal{F}_n\right] &= m^{-2(n+1)}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{X_n} Z_{n,i}\right)^2\Big|\mathcal{F}_n\right] \\ &= m^{-2(n+1)}\sum_{i,j=1}^{X_n}\mathbb{E}\left[Z_{n,i}Z_{n,j}\right] \\ &= m^{-2(n+1)}\left(\sum_{i=1}^{X_n}\mathbb{E}\left[Z_{n,i}^2\right] + \sum_{i\neq j}\mathbb{E}\left[Z_{n,i}\right]\mathbb{E}\left[Z_{n,j}\right]\right) \\ &= m^{-2(n+1)}\big((m^2+\sigma^2)X_n + m^2 X_n(X_n-1)\big) \\ &= M_n^2 + \frac{\sigma^2}{m^{2(n+1)}}M_n. \end{aligned}$$

En prenant l'espérance des deux côtés, on obtient

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1}^2\right] = \mathbb{E}\left[M_n^2\right] + \frac{\sigma^2}{m^{2(n+1)}}\mathbb{E}\left[M_n\right] = \mathbb{E}\left[M_n^2\right] + \frac{\sigma^2}{m^{n+2}}.$$

Comme $\sum_n \frac{\sigma^2}{m^{n+2}} < +\infty$, on en déduit que $\mathbb{E}\left[M_n^2\right]$ est borné, donc M est bornée dans L^2, donc elle converge dans L^2.

5. On dit qu'un individu x est à *descendance lente* si le nombre de descendants de x après n générations est $o(m^n)$. En particulier, un individu dont la descendance s'éteint est à descendance lente, et q est la probabilité que l'individu de départ soit à descendance lente.

   Dire que l'individu de départ a une descendance lente revient à dire qu'il existe i tel qu'il a i enfants, et chacun d'eux a une descendance lente. De même que dans la question 2, la probabilité que cela arrive vaut $\sum_i \mu(i)q^i = f(q)$, donc $q = f(q)$. Or, μ est une série entière à coefficients positifs, et il y a au moins un $i \geq 2$ tel que $\mu(i) > 0$, donc f est strictement convexe, donc elle a au plus deux points fixes. Comme p et 1 sont deux points fixes de f, on a donc soit $q = p$, soit $q = 1$. Mais dans le second cas, on a $M_\infty = 0$ p.s.. C'est absurde car M_n converge vers M_∞ dans L^2, donc aussi dans L^1, et $\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_0] = 1$ pour tout n. On a donc $q = p$. Cela signifie que presque sûrement, soit le processus X s'éteint, soit X_n est asymptotiquement équivalent à m^n fois une variable aléatoire strictement positive.

Exercice 2 (Une preuve de la loi forte des grands nombres)
Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que $\mathbb{E}[Z_n] = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{Var}(Z_n)}{n^2} < +\infty$. On pose, pour $n \geq 1$,

$$M_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{Z_j}{j} \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{j=1}^{n} Z_j \,.$$

1. Montrer que M_n converge p.s. quand n tend vers $+\infty$.
2. En exprimant S en fonction de M, en déduire $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 0$.
3. Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}[X] = 0$. On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires i.i.d. de même loi que X. Pour tout $n \geq 1$, on pose $Y_n = X_n \mathbb{1}_{|X_n|\leq n}$. Montrer que :

   (i) $\mathbb{E}[Y_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[X]$,

   (ii) $\mathbb{P}\left(\exists n \geq 1, \forall j \geq n, X_j = Y_j\right) = 1$,

   (iii) $\sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{Var}(Y_n)}{n^2} < \infty$.
4. En déduire la loi forte des grands nombres.

Solution de l'exercice 2

1. Comme les X_i sont d'espérance nulle, on vérifie facilement que M est une martingale. De plus, par indépendance des X_i, pour tout n on a

$$\mathbb{E}[M_n^2] = \mathrm{Var}(M_n) = \sum_{i=j}^{n} \mathrm{Var}\left(\frac{Z_j}{j}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{Var}(Z_j)}{j^2},$$

   qui est bornée par l'hypothèse sur les variances. La martingale M est donc bornée dans L^2, donc elle converge p.s. vers une variable M_∞.

2. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j(M_j - M_{j-1}) = \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} jM_j - \sum_{j=1}^{n-1}(j+1)M_j\right) = M_n - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} M_j.$$

   D'après le lemme de Cesaro, le membre de droite tend vers 0, d'où $\frac{S_n}{n} \to 0$ p.s.

3. (i) On a $\mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{|X|\leq n}]$, avec $X\mathbb{1}_{|X|\leq n} \to X$ p.s. et $|X\mathbb{1}_{|X|\leq n}| \leq |X|$, donc $\mathbb{E}[Y_n] \to \mathbb{E}[X] = 0$ par convergence dominée.

   (ii) Pour tout $j \geq 1$, on a $\mathbb{P}(X_j \neq Y_j) = \mathbb{P}(|X_j| > j) = \mathbb{P}(|X| > j)$ donc

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_j \neq Y_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X| > j) \leq \int_0^\infty \mathbb{P}(|X| > t)\,\mathrm{d}t = \mathbb{E}[|X|] < +\infty,$$

   donc d'après le lemme de Borel-Cantelli, p.s., $X_j = Y_j$ pour j assez grand.

   (iii) Enfin, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}(Y_n)}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[Y_n^2]}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\frac{|X|^2}{n^2}\mathbb{1}_{|X|\leq n}\right] = \mathbb{E}\left[|X|^2 \sum_{n\geq 1\vee|X|} \frac{1}{n^2}\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[|X|^2 \frac{c}{|X|}\right] = c\mathbb{E}[|X|] < +\infty,\end{aligned}$$

   en utilisant à la fin $\sum_{n\geq 1\vee a} \frac{1}{n^2} = O\left(\frac{1}{a}\right)$.

4. On se place dans le cadre de la question 3. Pour tout $n \geq 1$, posons $Z_n = Y_n - \mathbb{E}[Y_n]$. On a $\mathrm{Var}(Z_n) = \mathrm{Var}(Y_n)$ pour tout $n \geq 0$ donc $(Z_n)_{n\geq 1}$ vérifie les hypothèses des questions 1 et 2, donc
$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(Y_j - \mathbb{E}[Y_j]) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 0\,.$$
Or $\mathbb{E}[Y_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[X] = 0$, donc d'après le lemme de Cesaro on a
$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}[Y_j] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 0.$$
Enfin, p.s., il existe $J \geq 1$ tel que $Y_j = X_j$ pour tout $j \geq J$. On a alors
$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{J-1} X_j + \frac{1}{n}\sum_{j\geq J} Y_j \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$
ce qui achève la démonstration.

Exercice 3 (Propriété de Liouville)
Soit $G = (V, E)$ un graphe infini, connexe et localement fini (i.e. où chaque sommet n'a qu'un nombre fini de voisins) et $h : V \to \mathbb{R}$. On dit que h est *harmonique sur* G si pour tout $x \in V$, on a
$$h(x) = \frac{1}{\deg(x)}\sum_{y\sim x} h(y),$$
où la somme est effectuée sur les voisins y de x et où $\deg(x)$ est le nombre de ces voisins. On dit que G vérifie la *propriété de Liouville* si toute fonction bornée harmonique sur G est constante.

1. Montrer que si h est harmonique et (X_n) est une marche aléatoire simple sur G, alors $(h(X_n))_{n\geq 0}$ est une martingale.
2. Montrer que si la marche aléatoire simple sur G est récurrente (i.e. si elle visite presque sûrement tous les points une infinité de fois), alors G vérifie la propriété de Liouville.
3. Soient $x, y \in \mathbb{Z}^d$ tels que $\sum_{i=1}^d x_i \equiv \sum_{i=1}^d y_i \pmod 2$. Montrer qu'il existe (X_n) et (Y_n) deux marches aléatoires simples (non indépendantes !) issues respectivement de x et y telles que p.s., pour n assez grand, $X_n = Y_n$.
4. En déduire que $\mathbb{Z}^d$ vérifie la propriété de Liouville.
5. Donner un exemple de graphe (connexe, localement fini) ne vérifiant pas la propriété de Liouville.

Indication: Pour la question 3, commencer par le cas $d = 1$ puis essayer d'adapter à d quelconque.

Solution de l'exercice 3

1. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$. Conditionnellement à $\mathcal{F}_n$, le sommet X_{n+1} est uniforme parmi les voisins de X_n, donc $\mathbb{E}\left[h(X_{n+1})|\mathcal{F}_n\right]$ est la moyenne de h sur les voisins de X_n, c'est-à-dire X_n car h est harmonique.
2. Soit h harmonique bornée sur G. Soient $x, y \in V$ et (X_n) une marche aléatoire simple issue de x. Alors $(h(X_n))_{n\geq 0}$ est une martingale, donc elle converge p.s. Or, elle visite une infinité de fois x et y, donc elle prend une infinité de fois les valeurs $h(x)$ et $h(y)$, donc $h(x) = h(y)$, et ce pour tous x et y. La fonction h est donc constante, donc G est Liouville.

3. Dans le cas $d = 1$, l'idée est de faire démarrer deux marches aléatoires indépendantes $\widetilde{X}$ et $\widetilde{Y}$ issues de x et y. Par récurrence de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ (plus la condition de parité), le temps $\tau_1 = \inf\{n | \widetilde{X}_n = \widetilde{Y}_n\}$ est fini p.s. On prend alors $X = \widetilde{X}$ ainsi que $Y_n = \widetilde{Y}_n$ pour $n \leq \tau_1$ et $Y_n = \widetilde{X}_n$ pour $n \geq \tau_1$.

   Dans le cas général, il faut "coupler les coordonnées une par une" : on démarre deux marches indépendantes de x et y, et on note τ_1 le premier temps où leurs coordonnées selon e_1 coïncident. À partir de τ_1, on applique la stratégie du cas $d = 1$ pour que les coordonnées selon e_1 restent les mêmes pour $n \geq \tau_1$. Puis on attend τ_2, le premier temps où les coordonnées selon e_2 coïncident, et ainsi de suite.

   Les détails sont laissés en exercice, vous pouvez aussi venir me voir au bureau V2.

4. Soit h harmonique bornée sur G et soient x, y, X et Y comme dans la question précédente. Alors $(h(X_n))_{n\geq 0}$ et $(h(Y_n))_{n\geq 0}$ sont deux martingales bornées, donc elles convergent p.s. et dans L^1 vers respectivement X_∞ et Y_∞. Comme $X_n = Y_n$ pour n assez grand, on a $X_\infty = Y_\infty$ p.s.. Par convergence L^1, on peut donc écrire

$$h(x) = \mathbb{E}[X_\infty] = \mathbb{E}[Y_\infty] = h(y),$$

   donc h est constante sur $\{x \in \mathbb{Z}^d | \sum_{i=1}^d x_i \equiv 0 \pmod 2\}$, et il est facile d'en conclure que h est constante sur V.

5. Considérer l'arbre binaire infini. La marche aléatoire est transiente (car la "hauteur" augmente de 1 avec proba $\frac{2}{3}$ et diminue de 1 avec proba $\frac{1}{3}$), donc à partir d'un certain rang elle reste soit dans la moitié gauche de l'arbre, soit dans la moitié droite. On peut alors poser

$$h(x) = \mathbb{P}\left(\text{la marche aléatoire issue de } x \text{ finit dans la moitié gauche de l'arbre}\right).$$

   On vérifie facilement que h est harmonique et bornée (par 1). De plus, si x est "très haut" dans la moitié gauche de l'arbre, il a une très faible probabilité de redescendre jusqu'à la racine, donc $h(x)$ est proche de 1. Les détails sont laissés en exercice.

Exercice 4 (Théorème de Rademacher)
Le but de cet exercice est de montrer par une approche probabiliste que toute fonction lipschitzienne est primitive d'une fonction mesurable bornée. Soient X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ et $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz $L > 0$. Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$X_n = \lfloor 2^n X \rfloor 2^{-n} \qquad \text{et} \qquad Z_n = 2^n \left(f\left(X_n + 2^{-n}\right) - f(X_n)\right).$$

1. Montrer les égalités de tribus suivantes:

$$\sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n) = \sigma(X_n) \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{n\geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots) = \sigma(X).$$

2. Déterminer $\mathbb{E}[h(X_{n+1})|X_n]$ pour toute fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable continue. En déduire que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale bornée (où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ pour tout $n \geq 0$).

3. Montrer que (Z_n) converge p.s. et dans L^1 vers une variable aléatoire Z, puis qu'il existe une fonction $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée telle que $Z = g(X)$ p.s..

4. Calculer $\mathbb{E}[h(X)|X_n]$ pour toute fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. En déduire que p.s.:

$$Z_n = 2^n \int_{X_n}^{X_n + 2^{-n}} g(u) \mathrm{d}u.$$

5. Conclure que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = f(0) + \int_0^x g(u)\mathrm{d}u$.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>

1. On remarque que, pour $0 \leq k \leq n$, $X_k = 2^{-k}\lfloor 2^k X_n \rfloor$. On peut l'écrire proprement, ou faire un dessin pour s'en convaincre... Ainsi, pour $0 \leq k \leq n$, X_k est $\sigma(X_n)$-mesurable. On en déduit que $\sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n) = \sigma(X_n)$.

   De plus, pour tout $n \geq 0$, par définition de X_n, on sait que X_n est $\sigma(X)$-mesurable. Ainsi, on a l'inclusion
$$\bigcap_{n\geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots) \subset \sigma(X)\,.$$

   Enfin, X_n converge p.s. vers X quand n tend vers l'infini, donc X est $\sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$-mesurable pour tout $n \geq 0$. Ainsi, on obtient l'inclusion réciproque
$$\sigma(X) \subset \bigcap_{n\geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots).$$

2. Soit $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable continue. Alors h est bornée sur $[0,1]$ donc $h(X_n)$ est intégrable pour tout n. On a, pour $n \geq 0$ et $0 \leq k \leq 2^n - 1$,
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[h(X_{n+1})\mathbb{1}_{X_n = k/2^n}\right] &= \mathbb{E}\left[h(X_{n+1})\mathbb{1}_{X \in [k/2^n, (2k+1)/2^{n+1}[}\right] + \mathbb{E}\left[h(X_{n+1})\mathbb{1}_{X \in [(2k+1)/2^{n+1}, (k+1)/2^n[}\right] \\ &= 2^{-(n+1)}\left(h\left(\frac{k}{2^n}\right) + h\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)\right).\end{aligned}$$

   On en déduit
$$\mathbb{E}\left[h(X_{n+1}) \mid X_n\right] = \frac{h(X_n)}{2} + \frac{h\left(X_n + 2^{-(n+1)}\right)}{2}.$$

   Pour tout $n \geq 0$, la variable Z_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, et $|Z_n| \leq L$ donc Z_n est intégrable. De plus,
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= 2^{n+1}\mathbb{E}\left[f(X_{n+1} + 2^{-(n+1)}) - f(X_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n\right] \\ &= 2^{n+1}\mathbb{E}\left[f(X_{n+1} + 2^{-(n+1)}) - f(X_{n+1}) \mid X_n\right] \\ &= 2^n\left(f(X_n + 2^{-(n+1)}) - f(X_n) + f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n + 2^{-(n+1)})\right) \\ &= Z_n\,,\end{aligned}$$

   en utilisant à la deuxième ligne la première égalité de tribus de la question 1. Donc $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale bornée par L.

3. D'après la question 2, on sait que (Z_n) est une martingale bornée dans L^p pour tout $p > 0$, donc (Z_n) converge p.s. et dans L^1. On note Z sa limite. Pour tout $n \geq 0$, Z_n est mesurable par rapport à la tribu $\sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$ donc Z est mesurable par rapport à la tribu $\bigcap_{n\geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$. D'après la question 1, Z est ainsi $\sigma(X)$-mesurable. Il existe donc une fonction $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ borélienne telle que $Z = g(X)$. De plus, Z étant bornée par L, on peut choisir g bornée (en prenant remplaçant g par $g \wedge L$ par exemple).

4. Soit $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. La variable $h(X)$ est intégrable et on a, pour $n \geq 0$ et $0 \leq k \leq 2^n - 1$,
$$\mathbb{E}\left[h(X)\mathbb{1}_{X_n = k2^{-n}}\right] = \mathbb{E}\left[h(X)\mathbb{1}_{X \in [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[}\right] = \int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} h(x)\mathrm{d}x.$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}[h(X) \mid X_n] = 2^n \int_{X_n}^{X_n+2^{-n}} h(x)\mathrm{d}x.$$

La $(\mathcal{F}_n)$-martingale $(Z_n)_{n\geq 0}$ converge p.s. et dans L^1 vers Z, donc $Z_n = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_n]$ pour tout $n \geq 0$. On a donc p.s.

$$Z_n \;=\; \mathbb{E}[g(X)|X_n] \;=\; 2^n \int_{X_n}^{X_n+2^{-n}} g(u)\mathrm{d}u.$$

5. D'après la question 4., pour tout $n \geq 0$,

$$f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n) \;=\; \int_{X_n}^{X_n+2^{-n}} g(u)\mathrm{d}u \quad \text{p.s.}$$

Donc, pour tout $n \geq 0$ et pour tout $0 \leq k \leq 2^n - 1$,

$$f((k+1)2^{-n}) - f(k2^{-n}) \;=\; \int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} g(u)\mathrm{d}u$$

puis, en sommant, pour tout $0 \leq k \leq 2^n$,

$$f(k2^{-n}) \;=\; f(0) + \int_0^{k2^{-n}} g(u)\mathrm{d}u\,.$$

Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$,

$$f\left(2^{-n}\lfloor 2^n x\rfloor\right) \;=\; f(0) + \int_0^{2^{-n}\lfloor 2^n x\rfloor} g(u)\mathrm{d}u$$

et en faisant tendre n vers l'infini, par continuité de f on obtient

$$f(x) \;=\; f(0) + \int_0^x g(u)\mathrm{d}u.$$

Exercice 5 (Modèle de Wright-Fisher)
Un gène a deux allèles α et β. On considère une population qui se renouvelle entièrement à chaque génération, le nombre d'individus restant fixe et égal à $n \geq 2$. On suppose que pour tout $k \geq 0$, à la génération $k+1$, chacun des n individus choisit son parent uniformément parmi les n individus de la génération k, indépendamment les uns des autres. On note X_k le nombre d'individus portant l'allèle α à la génération k, et $\mathcal{F}_k = \sigma(X_0, \ldots, X_k)$. On suppose $X_0 = a \in [\![1, n-1]\!]$.

1. Quelle est la loi de X_{k+1} conditionnellement à $\mathcal{F}_k$? En déduire que X est une martingale pour $(\mathcal{F}_k)_{k\geq 0}$.

2. Montrer que X converge p.s. vers une variable X_∞, et donner sa loi.

   On pose $\tau = \inf\{k | X_k = X_\infty\}$.

3. Calculer $\mathbb{E}\left[X_{k+1}(n - X_{k+1})|\mathcal{F}_k\right]$ et trouver une martingale.

4. En déduire un encadrement de $\mathbb{E}[\tau]$. On pourra par exemple montrer

$$\mathbb{E}[\tau] = O(n \ln n).$$

<u>*Solution de l'exercice 5*</u>

1. Conditionnellement à $\mathcal{F}_k$, chaque individu de la génération porte l'allèle α avec probabilité $\frac{X_k}{n}$, indépendamment les uns des autres, donc X_{k+1} suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{X_k}{n}$. On en déduit $\mathbb{E}[X_{k+1}|\mathcal{F}_k] = n \times \frac{X_k}{n} = X_k$. De plus, le processus X est bien intégrable et adapté, donc X est bien une martingale.

2. La martingale X est bornée par n, donc elle converge p.s. et dans L^1 vers une variable X_∞. On va maintenant montrer que $X_\infty \in \{0, n\}$ p.s. Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$. Pour tout k, on pose
$$q = \mathbb{P}\left(X_{k+1} = j | X_k = j\right) = \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^j \left(1 - \frac{j}{n}\right)^{n-j} < 1.$$
On a pour tout $\ell \geq 0$:
$$\mathbb{P}\left(X_k = X_{k+1} = \cdots = X_{k+\ell} = j\right) = \mathbb{P}\left(X_k = j\right) \prod_{i=0}^{\ell-1} \mathbb{P}\left(X_{k+i+1=j} | X_{k+i=j}\right) \leq q^\ell \xrightarrow[\ell \to +\infty]{} 0.$$
On en déduit $\mathbb{P}\left(\forall i \geq k, X_i = j\right) = 0$ pour tous $j \in [\![1, n-1]\!]$ et $k \geq 0$, donc $\mathbb{P}\left(X_\infty = j\right) = 0$ (comme X est à valeurs entières et converge, elle est constante à partir d'un certain rang). On a donc $X_\infty \in \{0, n\}$ p.s. De plus, par convergence L^1 on a $\mathbb{E}\left[X_\infty\right] = \mathbb{E}[X_0] = a$, donc $\mathbb{P}\left(X_\infty = 0\right) = 1 - \frac{a}{n}$ et $\mathbb{P}\left(X_\infty = n\right) = \frac{a}{n}$.

3. On sait que l'espérance et la variance d'une variable de loi binomiale de paramètres n et p valent respectivement pn et $p(1-p)n$. On obtient donc
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{k+1}(n - X_{k+1})|\mathcal{F}_k] &= n\mathbb{E}[X_{k+1}|\mathcal{F}_k] - \mathbb{E}[X_{k+1}|\mathcal{F}_k]^2 - \mathrm{Var}(X_{k+1}|\mathcal{F}_k) \\ &= nX_k - X_k^2 - \frac{1}{n} X_k(n - X_k) = \frac{n-1}{n} X_k(n - X_k). \end{aligned}$$
On en déduit que $\left(\left(\frac{n}{n-1}\right)^k X_k(n - X_k)\right)_{k \geq 0}$ est une martingale, qu'on note M.

4. Soit $k \geq 0$. Si $\tau > k$, alors $1 \leq X_k \leq n-1$ donc $X_k(n - X_k) \geq n - 1$ donc
$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\tau \geq k+1\right) &= \mathbb{P}\left(X_k(n - X_k) \geq n - 1\right) \\ &= \mathbb{P}\left(M_k \geq (n-1)\left(\frac{n}{n-1}\right)^k\right) \\ &\leq \frac{1}{n-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^k \mathbb{E}\left[M_k\right] \\ &= \frac{1}{n-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^k \mathbb{E}\left[M_0\right] \\ &\leq \frac{n^2}{4(n-1)}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k. \end{aligned}$$
On a donc $\mathbb{P}\left(\tau \geq k+1\right) \leq 1 \wedge \frac{n^2}{4(n-1)}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$. On a $\frac{n^2}{4(n-1)}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = 1$ pour $k \approx n \ln n$. On écrit donc
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tau] &= \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}\left(\tau \geq k+1\right) \\ &\leq \sum_{k=0}^{\lfloor n \ln n \rfloor} 1 + \sum_{k=1+\lfloor n \ln n \rfloor}^{+\infty} \frac{n^2}{4(n-1)}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \\ &\leq n \ln n + 1 + \frac{n^2}{4(n-1)} n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n \ln n} \\ &\leq n \ln n + 1 + \frac{n^3}{4(n-1)} \exp\left(-\frac{1}{n} n \ln n\right) \\ &= n \ln n + O(n). \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour tout $k \geq 0$ on a $X_k(n - X_k) \leq \mathbb{1}_{\tau > k} \frac{n^2}{4}$ donc

$$a(n-a) = \mathbb{E}[M_k] \leq \frac{n^2}{4} \left(\frac{n}{n-1} \right)^k \mathbb{P}\left(\tau > k\right).$$

On en déduit

$$\mathbb{E}[\tau] = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}\left(\tau \geq k+1\right) \geq \frac{4}{n^2} a(n-a) \sum_{k \geq 0} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = \frac{4a(n-a)}{n}.$$

Par exemple, on prenant $a = \frac{n}{2}$, on obtient $\mathbb{E}[\tau] \geq (1 + o(1))n$.