Processus Stochastiques
ENS Paris, 2021-2022

Rémy Mahfouf
Bureau V2
remy.mahfouf@ens.fr

TD 7 : Chaînes de Markov

Vendredi 19 Novembre

1 Chaînes de Markov

Exercice 1 (Markov ou pas Markov ?)
Soit (S_n) une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$. Lesquels des processus suivants sont des chaînes de Markov sur $\mathbb{Z}$? Pour ceux qui le sont, donner la matrice de transition.

1. $A = (S_n)_{n\geq 0}$,
2. $B = (S_n + n)_{n\geq 0}$,
3. $C = \left(S_n + n^2\right)_{n\geq 0}$,
4. $D = (S_n + 10^n)_{n\geq 0}$,
5. $E = (S_n + (-1)^n)_{n\geq 0}$,
6. $F = (|S_n|)_{n\geq 0}$,
7. $G = \left(S_n^2 - n\right)_{n\geq 0}$,
8. $H = (S_{2n})_{n\geq 0}$,
9. $I = (X_n)_{n\geq 0}$ une arbre de Galton-Watson,
10. J avec $J_{n+1} = (J_n+1)\xi_{n+1}$ où $\xi_j \sim \mathcal{B}(p)$ i.i.d.

Solution de l'exercice 1

1. Oui. La matrice de transition est $Q(x,y) = \frac{1}{2}$ si $|x-y| = 1$ et 0 sinon.
2. Oui. La matrice de transition est $Q(x,y) = \frac{1}{2}$ si $y = x$ ou $y = x+2$, et 0 sinon.
3. Non. Si C était une chaîne de Markov de matrice de transition Q, on aurait d'une part
$$\mathbb{P}\left(C_0 = 0, C_1 = 0\right) = Q(0,0)$$
soit $Q(0,0) = \mathbb{P}\left(S_1 = -1\right) = \frac{1}{2}$, et d'autre part
$$\mathbb{P}\left(C_0 = 0, C_1 = 0, C_2 = 0\right) = Q(0,0)^2,$$
mais $C_2 \geq -2+2^2 = 2$ donc $\mathbb{P}\left(C_2 = 0\right) = 0$ donc $Q(0,0)^2 = 0$ et $Q(0,0) = 0$, d'où la contradiction.
4. Oui. La matrice de transition est la suivante : pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$ de même parité que n tel que $|k| \leq n$, on pose $Q(10^n+k, 10^{n+1}+k+1) = Q(10^n+k, 10^{n+1}+k-1) = \frac{1}{2}$, et $Q(10^n+k, y) = 0$ pour tous les autres y. Cette définition a bien un sens car chaque entier peut s'écrire d'au plus une manière comme $10^n + k$ avec $|k| \leq n$. Notons que cet argument ne marche plus pour l'exemple précédent, car par exemple 0 peut s'écrire $0^2 + 0$, mais aussi $1^2 + (-1)$.
5. Oui. La matrice de transition est la suivante : si x est pair alors $Q(x,y) = \frac{1}{2}$ si $y = x-1$ ou $y = x-3$ et 0 sinon. Si x est impair alors $Q(x,y) = \frac{1}{2}$ si $y = x+1$ ou $y = x+3$ et 0 sinon.
6. Oui. La matrice de transition est la suivante : on a $Q(0,1) = 1$ et $Q(0,y) = 0$ pour tout $y \neq 1$ et, pour $x \geq 1$, on a $Q(x,y) = \frac{1}{2}$ si $|y-x| = 1$ et 0 sinon.

7. Non. Si G était une chaîne de Markov de matrice de transition Q, on aurait d'une part
$$Q(0,0) = \mathbb{P}(G_1 = 0) = \mathbb{P}\left(S_1^2 = 1\right) = 1$$
et d'autre part
$$Q(0,0)^2 = \mathbb{P}(G_1 = G_2 = 0) \leq \mathbb{P}(G_2 = 0) = \mathbb{P}\left(S_2^2 = 2\right) = 0,$$
d'où la contradiction.
8. Oui. La matrice de transition est
$$Q(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x = y, \\ \frac{1}{4} & \text{si } |x-y| = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 2 On dit qu'un graphe G est transitif si pour tous sommets u et v de G, il existe un automorphisme Φ de G tel que $\Phi(u) = v$ (autrement dit, les sommets de G jouent tous le même rôle). Soit G un graphe (fini ou infini) transitif et localement fini, et soit X une marche aléatoire simple sur G issue d'un sommet u.

1. Montrer que pour tout sommet v et tout $k \geq 0$, on a
$$\mathbb{P}(X_{2k} = u) \geq \mathbb{P}(X_{2k} = v).$$
2. En déduire que $\mathbb{P}(X_{2k} = u)$ est décroissante en k.

Solution de l'exercice 2

1. Notons que si le graphe est transitif, alors tous les sommets ont le même degré d. Soit Q la matrice de transition de la marche aléatoire simple sur G, i.e. $Q(x,y) = \frac{1}{d}$ si x et y sont voisins et 0 sinon. L'énoncé se réécrit :
$$Q^{2k}(u,v) \leq Q^{2k}(u,u).$$
Or, on a
$$Q^{2k}(u,v) = \sum_w Q^k(u,w)Q^k(w,v) = \sum_w Q^k(u,w)Q^k(v,w) \leq \left(\sum_w Q^k(u,w)^2\right)^{1/2} \left(\sum_w Q^k(v,w)^2\right)^{1/2},$$
en utilisant la symétrie de Q, puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz. De plus, comme le graphe est transitif, la famille $\left(Q^k(v,w)\right)_{w\in G}$ est une permutation de la famille $\left(Q^k(u,w)\right)_{w\in G}$. En effet, si Φ est un automorphisme de G qui envoie u sur v, on a $Q^k(u,w) = Q^k(v,\Phi(w))$ pour tout sommet w. On a donc $\sum_w Q^k(v,w)^2 = \sum_w Q^k(u,w)^2$, d'où
$$Q^{2k}(u,v) \leq \sum_w Q^k(u,w)^2 = \sum_w Q^k(u,w)Q^k(w,u) = Q^{2k}(u,u),$$
en réutilisant à la fin la symétrie de Q. Notons que même si G est infini, X_k et X_{2k} ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs, donc toutes les sommes manipulées sont en fait finies, donc il n'y a pas de problème de convergence.
2. Soit $k \geq 0$. On a
$$\begin{aligned} Q^{2k+2}(u,u) &= \sum_v Q^{2k}(u,v)Q^2(v,u) \\ &\leq Q^{2k}(u,u)\sum_v Q^2(v,u) \\ &= Q^{2k}(u,u)\sum_v Q^2(u,v) \\ &= Q^{2k}(u,u) \end{aligned}$$
en utilisant successivement la question précédente, et la symétrie de Q. Cela conclut.

Remarque La première question est fausse sans l'hypothèse de transitivité (prendre par exemple un graphe avec un sommet de très gros degré), et en remplaçant $2k$ par un entier impair (prendre un grand cycle de longueur impaire).

Exercice 3 (h-transformée d'une chaîne de Markov)
Soit S un ensemble dénombrable et $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur S de matrice de transition Q. Soit $h : S \to \mathbb{R}_+$. Soit P la matrice définie sur $S_+ = \{x \in S | h(x) > 0\}$ par la formule

$$P(i,j) = \frac{h(j)}{h(i)} Q(i,j).$$

1. Donner une hypothèse sur h qui garantit que P est la matrice de transition d'une chaîne de Markov sur S^+. Que signifie cette hypothèse si X est la marche aléatoire simple sur un graphe ? *On dit alors que P est la h-transformée de Q.*
2. Soit Y une chaîne de Markov de matrice de transition P. Déterminer la dérivée de Radon-Nikodým de la loi de $(Y_i)_{0\leq i\leq n}$ par rapport à celle de $(X_i)_{0\leq i\leq n}$.
3. On considère la marche aléatoire simple S sur $\mathbb{Z}$. On note $T_i = \inf\{n \geq 0 | S_n = i\}$. Pour $N > 0$ et $k \in [\![0, N]\!]$, on définit
$$\mathbb{P}_k^{(N)} = \mathbb{P}_k(\,\cdot\,| T_N < T_0).$$
   (a) On rappelle que $\mathbb{P}_k(T_N < T_0) = \frac{k}{N}$. Montrer que sous $P_k^{(N)}$, $(S_{n\wedge T_N})_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition.
   (b) Trouver une fonction $h : [\![0, N]\!] \to \mathbb{R}_+$ telle que la matrice de transition de la question précédente soit la h-transformée de la matrice de transition de la marche aléatoire simple.
   (c) Proposer une définition de la "marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ conditionnée à rester positive".

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>

1. Il faut avoir $\sum_{j\in S^+} P(i,j) = 1$ pour tout $i \in S^+$, soit
$$\sum_{j\in S^+} Q(i,j)h(j) = h(i).$$
Par définition de S^+, le membre de gauche est égal à $\sum_{j\in S} Q(i,j)h(j)$ car les contributions pour $j \in S\backslash S^+$ sont nulles. Une condition suffisante est donc
$$\forall i \in S^+, h(i) = \sum_{j\in S} Q(i,j)h(j).$$
Si X est une marche aléatoire simple, i.e. $Q(i,j) = \frac{1}{\deg(i)} \mathbb{1}_{i\leftrightarrow j}$, cette condition signifie que h est harmonique sur S^+.
2. Soient $y_0, \ldots, y_n \in S^+$. On a
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(Y_0 = y_0 \ldots, Y_n = y_n\right) &= \mathbb{P}\left(X_0 = y_0\right) P(y_0, y_1) \ldots P(y_{n-1}, y_n) \\
&= \mathbb{P}\left(X_0 = y_0\right) \frac{h(y_1)}{h(y_0)} Q(y_0, y_1) \ldots \frac{h(y_n)}{h(y_{n-1})} Q(y_{n-1}, y_n) \\
&= \frac{h(y_n)}{h(y_0)} \mathbb{P}\left(X_0 = y_0 \ldots, X_n = y_n\right).
\end{aligned}$$
La dérivée de Radon-Nikodym recherchée vaut donc $\frac{h(X_n)}{h(X_0)}$.
3. On calcule
$$\begin{aligned}
&P_k^{(N)}\left(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n\right) \\
&\qquad = \frac{\mathbb{P}_k\left(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1} \text{ et } T_N < T_0\right)}{\mathbb{P}_k\left(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n \text{ et } T_N < T_0\right)}.
\end{aligned}$$

Par la propriété de Markov simple, on a $\mathbb{P}_k\left(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n \text{ et } T_N < T_0\right) = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{x_n}{N}$, ainsi que $\mathbb{P}_k\left(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1} \text{ et } T_N < T_0\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{x_{n+1}}{N}$. Par conséquent,

$$P_k^{(N)}[X_{n+1} = x_{n+1} \,| X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n] = \frac{x_{n+1}}{2x_n}.$$

La marche arrêtée sous la proba $P_k^{(N)}$ est donc une chaîne de Markov de matrice de transition

$$Q(x,y) = \frac{y}{2x}\mathbb{1}_{|x-y|=1} \quad \text{et} \quad Q(N,N) = 1.$$

Il s'agit de la h-transformée de la marche simple stoppée en N avec $h(x) = x$.
Conditionner une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ (issue, par exemple, de 1) à ne pas taper 0 n'a a priori pas de sens. Une manière de lui donner un sens est de la conditionner à taper N avant 0 puis de faire tendre N vers $+\infty$. D'après la discussion qui précède, pour tous n et $x_0, x_1, \ldots, x_n$ avec $x_0 = 1$ on a

$$\mathbb{P}_1^{(N)}\left(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1}}{2x_i}\mathbb{1}_{|x_{i+1}-x_i|=1}.$$

Un candidat naturel est donc la h-transformée de la marche simple avec $h(x) = x\mathbb{1}_{x>0}$.

Remarque L'utilisation d'une h-transformée pour "conditionner" une marche aléatoire à un événement de probabilité nulle (par exemple ne pas taper un état ou un ensemble d'états donné) fonctionne dans des cas assez variés.

Exercice 4 Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaine de Markov sur E. Pour $x \in E$ on pose $H_x := \inf\{n \geq 1 : X_n = x\}$ et $N_x = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{X_n=x}$.

1. Montrez que $\mathbb{P}_x(H_x < \infty) = 1 \iff N_x = \infty$ p.s . Montrez que $\mathbb{P}_x(H_x < \infty) < 1$ implique $\mathbb{E}_x[N_x] = \frac{1}{P_x(H_x=\infty)}$. Dans le premier cas on dit que x est réccurent, dans le second que x est transitoire.
2. On pose pour $x, y \in E$, $U(x,y) = E_x[N_y]$. Exprimer $U(x,y)$ en fonction des $Q^n(x,y)$ puis montrer que x est récurrent si et seulement si $U(x,x) = \infty$.
3. Montrer que $U(x,y) = \mathbb{P}_x(H_y < \infty)U(y,y)$. Que dire de l'ensemble des points récurrents ?
4. En supposant $E_x[N_y] = \infty$, quelles valeurs peut prendre $E_y[N_x]$?

Solution de l'exercice 4

1. Les 3 premières propritétés sont vues en cours et sont détaillées dans le polycopié de J-F. Le Gall page 200-201.
2. La marche simple est récurrente en $d = 1, 2$ et transiante pour $d \geq 3$. On peut voir ce résultat en utilisant une formule explicite de la probabilité d'être en 0 après n pas (via des coefficients multinomiaux) ainsi que la propriété vérifiée dans la question 1 i.e. La marche est récurrente ssi $U(0,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = \infty$.