Processus Stochastiques Rémy Mahfouf
ENS Paris, 2021-2022 Bureau V2
remy.mahfouf@ens.fr

TD 8 : Chaînes de Markov et classification des états

Vendredi 26 Novembre

Exercice 1 Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ issue de 0. Pour tout $i \geq 0$, on pose $T_i = \min\{n \geq 0 | S_n = i\}$ (on rappelle que tous les T_i sont finis p.s. par récurrence de S).

1. Montrer que les variables $T_{i+1} - T_i$ sont i.i.d.
2. On suppose maintenant que S est une marche biaisée négativement, i.e. les $S_{n+1} - S_n$ sont i.i.d. et
$$\mathbb{P}\left(S_{n+1} - S_n = -1\right) = 1 - \mathbb{P}\left(S_{n+1} - S_n = +1\right) > \frac{1}{2}.$$
Montrer sans calcul que $M = \max\{S_n | n \geq 0\}$ est une variable géométrique.
3. On se replace dans le cas non biaisé. Déduire de la question 1 que $\mathbb{E}[T_1] = +\infty$

Solution de l'exercice 1

1. On propose deux manières de rédiger le résultat : une manière formelle en utilisant la formule vue en cours, et une autre plus intuitive.

   Preuve formelle :
   Soit $i \geq 0$. On rappelle la formule donnant la propriété de Markov forte pour le temps d'arrêt T_i : pour toute variable $\mathcal{F}_{T_i}$-mesurable F et toute variable G qui est une fonction mesurable de S, on a
$$\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{T_i<+\infty} F \times G \circ \theta_{T_i}\right] = \mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{T_i<+\infty} F \mathbb{E}_{S_{T_i}}[G]\right].$$
   Notons que dans notre cas, on a $T_i < +\infty$ p.s. (déjà vu précédemment) et $S_{T_i} = i$ par définition de i, donc la formule s'écrit
$$\mathbb{E}_0\left[F \times G \circ \theta_{T_i}\right] = \mathbb{E}_0\left[F \mathbb{E}_i[G]\right].$$
   On prend $G = \mathbb{1}_{T_{i+1}=t_{i+1}}$, avec $t_{i+1} \in \mathbb{N}$. On a alors
$$G \circ \theta_{T_i} = \mathbb{1}_{T_{i+1}-T_i=t_{i+1}},$$
   donc dans ce cas la formule s'écrit
$$\begin{aligned}\mathbb{E}_0\left[F \mathbb{1}_{T_{i+1}-T_i=t_{i+1}}\right] &= \mathbb{E}_0\left[F \mathbb{P}_i(T_{i+1} = t_{i+1})\right] \\ &= \mathbb{E}_0\left[F \mathbb{P}_0(T_1 = t_{i+1})\right] \\ &= \mathbb{P}_0(T_1 = t_{i+1}) \mathbb{E}_0[F]\end{aligned}$$
   en utilisant le fait qu'une marche aléatoire simple issue de i a la même loi qu'une marche issue de 0 à laquelle on a ajouté i, donc T_{i+1} en partant de i a la même loi que T_1 en partant de 0. Cela est vrai pour toute variable $\mathcal{F}_{T_i}$-mesurable F. En particulier, en prenant
$$F = \mathbb{1}_{T_1=t_1, T_2-T_1=t_2, \ldots, T_i-T_{i-1}=t_i},$$

on obtient

$$\mathbb{P}\left(T_1 = t_1, T_2 - T_1 = t_2, \ldots, T_{i+1} - T_i = t_{i+1}\right) = \mathbb{P}\left(T_1 = t_{i+1}\right) \mathbb{P}\left(T_1 = t_1, T_2 - T_1 = t_2, \ldots, T_i - T_{i-1} =\right.$$

Par une récurrence immédiate sur i, on obtient donc

$$\mathbb{P}\left(T_1 = t_1, T_2 - T_1 = t_2, \ldots, T_i - T_{i-1} = t_i\right) = \prod_{j=1}^{i} \mathbb{P}\left(T_1 = t_i\right),$$

donc les variables $T_{i+1} - T_i$ sont bien des copies i.i.d. de T_1.

Preuve intuitive :
Soit $i \geq 0$. Par la propriété de Markov forte, conditionnellement à $\mathcal{F}_{T_i}$, le processus $(S_{T_i+n})_{n\geq 0}$ a la loi d'une marche simple issue de i, donc $\widetilde{S} = (S_{T_i+n} - i)_{n\geq 0}$ est une marche simple sur $\mathbb{Z}$ conditionnellement à $\mathcal{F}_{T_i}$. De plus, on a

$$T_{i+1} - T_i = \min\{n \geq 0 | \widetilde{S}_n = 1\},$$

donc conditionnellement à $\mathcal{F}_{T_i}$, la variable $T_{i+1} - T_i$ a la même loi que T_1. Or, les variables $T_1, T_2 - T_1, \ldots, T_i - T_{i-1}$ sont $\mathcal{F}_{T_i}$-mesurables, donc $T_{i+1} - T_i$ a la loi de T_1 et est indépendante de $(T_{j+1} - T_j)_{0\leq j\leq i-1}$, d'où le résultat.

2. Le raisonnement est similaire. Soit $i \geq 0$. Conditionnellement à $\mathcal{F}_{T_i}$, si $T_i < +\infty$, le processus $\widetilde{S} = (S_{T_i+n} - i)_{n\geq 0}$ est une marche simple sur $\mathbb{Z}$ par la propriété de Markov forte, donc

$$\mathbb{P}\left(T_{i+1} < +\infty | T_i < +\infty\right) = \mathbb{P}\left(\exists n \geq 0, \widetilde{S}_n = +1\right) = \mathbb{P}\left(T_1 < +\infty\right).$$

Par récurrence, on en déduit $\mathbb{P}\left(T_i < +\infty\right) = \mathbb{P}\left(T_1 < +\infty\right)^i$ pour tout $i \geq 0$, d'où le résultat car $T_i < +\infty$ équivaut à $M \geq i$.

On pourrait aussi rédiger une preuve formelle dans le même esprit que celle de la question précédente, en prenant $G = \mathbb{1}_{T_{i+1}<+\infty}$. La seule différence est que les temps d'arrêt auxquels on applique Markov forte ne sont pas finis p.s., donc on doit garder l'indicatrice jusqu'au bout dans la formule.

3. On utilise la loi forte des grands nombres. Si on avait $\mathbb{E}[T_1] < +\infty$, comme T_i peut s'écrire comme la somme de i copies i.i.d. de T_1, on aurait $\frac{T_i}{i} \to \mathbb{E}[T_1]$ p.s. quand $i \to +\infty$. On aurait donc $\frac{S_{T_i}}{T_i} \to \frac{1}{\mathbb{E}[T_1]} > 0$ quand $i \to +\infty$, ce qui contredit la formule $\frac{S_n}{n} \to 0$ donnée par la loi forte des grands nombres.

Remarque: Le résultat de la deuxième question a déjà été obtenu (avec le paramètre de la loi géométrique) en utilisant le théorème d'arrêt dans un TD précédent.

Exercice 2 (Petites questions sur la classification des états)
On notera génériquement $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition Q à valeurs dans un espace d'états dénombrable S. Pour $x \in S$, on notera $N_x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{X_n=x\}}$.

1. Donner un exemple où l'ensemble des points visités par la chaîne issue de x n'est pas déterministe.

2. Donner un exemple où, sous $\mathbb{P}_x$, l'ensemble des points visités par la chaîne est p.s. toujours le même, sans que x soit récurrent. Donner un exemple où, de plus, l'ensemble des 3 premiers points visités en partant de x n'est pas déterministe.

3. Pour $x, y \in S$, est-il vrai que si y est récurrent et il existe n tel que $Q^n(x,y) > 0$, alors $N_y = +\infty$ $\mathbb{P}_x$-p.s. ?

4. Donner un exemple où il existe n tel que $Q^n(x,y) > 0$ mais $Q^m(y,x) = 0$ pour tout $m \geq 0$.

5. Montrer que pour $x, y \in S$, si $\mathbb{E}_x[N_y] = +\infty$, alors y est récurrent. La réciproque est-elle vraie ?

6. Peut-on avoir $0 < \mathbb{E}_x[N_y] < +\infty$, avec y récurrent ?

7. Si $\mathbb{E}_x[N_y] = +\infty$, quelles valeurs peut prendre $\mathbb{E}_y[N_x]$?

8. On suppose que pour tout $x \in S$, l'ensemble $V_x = \{y \in S \,|\, \exists n \text{ tel que } Q^n(x,y) > 0\}$ est fini. Montrer qu'il existe des états récurrents.

Solution de l'exercice 2

1. On prend $S = \{-1, 0, 1\}$, $Q(1,1) = Q(-1,-1) = 1$ et $Q(0,1) = Q(0,-1) = 1/2$. Alors, sous $\mathbb{P}_0$, l'ensemble des points visités est $\{0,1\}$ avec probabilité $1/2$, et $\{0,-1\}$ avec probabilité $1/2$.

2. Pour $S = \{0,1\}$ et $Q(0,1) = 1 = Q(1,1)$, on voit que $x = 0$ n'est pas récurrent, et l'ensemble des points visités par la chaîne est $\{0,1\}$ $\mathbb{P}_0$-p.s..

   Pour $S = \{0,1,2\}$ et $Q(i,1) = Q(i,2) = 1/2$ pour $i = 0,1,2$, on voit que $x = 0$ n'est pas récurrent, que l'ensemble des points visités est $\{0,1,2\}$ $\mathbb{P}_0$-p.s., et que le deuxième point visité est 1 ou 2 avec probabilité $1/2$ chacun.

3. La réponse est non. Il suffit de reprendre l'exemple de la question 1., on voit que 1 est récurrent, $Q(0,1) > 0$ mais $\mathbb{P}_0(N_1 = +\infty) = 1/2$.

4. Toujours avec le même exemple, $Q(0,1) > 0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $Q^p(1,0) = 0$.

5. On a, d'après la propriété de Markov forte pour $H_y = \inf\{n \geq 1 \,|\, X_n = y\}$, en notant (Y_n) une autre chaîne de même matrice de transition,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x[N_y] &= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{H_y<+\infty} \sum_{n \geq H_y} \mathbb{1}_{X_n=y}\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{H_y<+\infty} \mathbb{E}_{X_{H_y}}\left[\sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{Y_n=y}\right]\right] \\
&= \mathbb{P}_x(H_y < +\infty)\mathbb{E}_y\left[\sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{Y_n=y}\right] \\
&= \mathbb{P}_x\left(H_y < +\infty\right)\mathbb{E}_y[N_y],
\end{aligned}$$

   donc si $\mathbb{E}_x[N_y] = +\infty$, comme $\mathbb{P}_x(H_y < +\infty)$ est fini, on a $\mathbb{E}_y[N_y] = +\infty$, i.e. y est récurrent.

   La réciproque est fausse, cf l'exemple 1. où 1 est récurrent, mais $\mathbb{E}_{-1}[N_1] = 0$.

6. Non, car $\mathbb{E}_x[N_y] = \mathbb{P}_x(H_y < +\infty)\mathbb{E}_y[N_y]$ (cf question 5.) et $\mathbb{E}_y[N_y] = +\infty$, donc $\mathbb{E}_x[N_y] = 0$ ou $+\infty$ selon que $\mathbb{P}_x(H_y < +\infty) = 0$ ou > 0.

7. Si $\mathbb{E}_x[N_y] = +\infty$, alors y est récurrent (cf 5.). On en déduit que $\mathbb{E}_y[N_x]$ ne peut prendre que 2 valeurs : $\mathbb{E}_y[N_x] = +\infty$ si x est récurrent et dans la même classe que y, et $\mathbb{E}_y[N_x] = 0$ sinon.

8. Soit $x \in E$. Sous $\mathbb{P}_x$, la chaîne reste p.s. dans V_x, donc sous $\mathbb{P}_x$,
$$\forall k \geq 0 \qquad \sum_{y \in V_x} Q^k(x,y) \;=\; 1\,,$$
donc
$$\sum_{y \in V_x} \sum_{k \geq 0} Q^k(x,y) \;=\; \sum_{k \geq 0} \sum_{y \in V_x} Q^k(x,y) \;=\; +\infty\,.$$
V_x étant fini, il existe $y \in V_x$ tel que $\mathbb{E}_x[N_y] = \sum_{k\geq 0} Q^k(x,y) = +\infty$, ce qui implique (cf 5.) que y est récurrent.

Exercice 3 (Chaîne de naissance et de mort)
Soit Q la matrice de transition sur $\mathbb{N}$ donnée par:
$$Q = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & q_3 & r_3 & p_3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$
avec $p_0 > 0$, $p_0 + r_0 = 1$, ainsi que $p_i > 0$, $q_i > 0$ et $p_i + r_i + q_i = 1$ pour tout $i \geq 1$. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ de matrice de transition Q.

1. Montrer que X est irréductible.

2. On suppose que
$$\sum_{i\geq 1} \frac{p_0 \cdots p_{i-1}}{q_1 \cdots q_i} \;<\; +\infty\,.$$
Montrer que X admet une mesure de probabilité réversible π qu'on déterminera. Que peut-on en déduire sur X ?

3. On pose $f(j) = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{q_1 \ldots q_i}{p_1 \ldots p_i}$ (avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$) et $\tau = \inf\{n \geq 0 | X_n = 0\}$. Montrer que $f(X_{n\wedge\tau})$ est une martingale, et en déduire que X_n est récurrente si et seulement si
$$\sum_{i\geq 0} \frac{q_1 \ldots q_i}{p_1 \ldots p_i} = +\infty.$$

Solution de l'exercice 3

1. Soient $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$. On remarque que
$$\begin{aligned} Q^{j-i}(i,j) &\geq Q(i,i+1)\ldots Q(j-1,j) \;=\; p_i \ldots p_{j-1} \;>\; 0 \text{ si } i<j \\ Q^{i-j}(i,j) &\geq Q(i,i-1)\ldots Q(j+1,j) \;=\; q_i \ldots q_{j+1} \;>\; 0 \text{ si } i>j \\ Q^2(i,i) &\geq Q(i,i+1)Q(i+1,i) \;=\; p_i q_{i+1} \;>\; 0\,, \end{aligned}$$
donc X est irréductible.

2. Soit π une mesure de probabilité. Elle est réversible ssi pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\pi(i)p_i \;=\; \pi(i+1)q_{i+1}\,. \tag{1}$$

En effet cette condition est suffisante car si $j \neq i\pm 1$, la condition $\pi(i)Q(i,j) = \pi(j)Q(j,i)$ est triviale. La condition (1) est équivalente à : pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\pi(i) \;=\; \pi(0) \times \frac{p_0 \dots p_{i-1}}{q_1 \dots q_i}. \tag{2}$$

Il suffit donc de vérifier qu'il existe une mesure de probabilité qui satisfait (2). Or

$$s \;:=\; \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{p_0 \dots p_{i-1}}{q_1 \dots q_i} \;\in]0,+\infty[$$

par hypothèse, donc on peut poser $\pi(0) = \frac{1}{s}$ pour obtenir $\sum_i \pi(i) = 1$. On en déduit que la mesure π définie par

$$\forall i \in \mathbb{N}\,, \qquad \pi(i) = \frac{1}{s}\frac{p_0 \dots p_{i-1}}{q_1 \dots q_i}$$

est bien une probabilité réversible pour la chaîne.

La mesure π étant réversible, elle est également invariante. Puisque la chaîne est irréductible et admet une probabilité invariante, on sait qu'elle est aussi récurrente positive.

Si la somme considérée est infinie, π reste une mesure réversible donc invariante, mais sa masse est infinie. Par unicité de la mesure invariante pour une chaîne de Markov irréductible, X n'a donc pas de mesure de proba invariante, donc la condition qu'on a donnée est nécessaire et suffisante.

3. On se fixe un point de départ $x > 0$, et on commence par montrer que $f(X_{n\wedge\tau})$ est une martingale sous $\mathbb{P}_x$ pour $(\mathcal{F}_n)$, où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$. Si $X_{n\wedge\tau} = 0$, alors $X_{(n+1)\wedge\tau} = 0$, donc

$$\mathbb{E}\left[f(X_{(n+1)\wedge\tau})|\mathcal{F}_n\right] = f(0) = f(X_{n\wedge\tau}).$$

Si $X_{n\wedge\tau} > 0$, alors $X_{(n+1)\wedge\tau} = X_{n+1}$, et sa loi conditionnelle sachant $\mathcal{F}_n$ est la suivante : elle vaut $X_n + 1$ avec proba p_{X_n}, elle vaut X_n avec proba r_{X_n}, et elle vaut $X_n - 1$ avec proba q_{X_n}. On en déduit

$$\mathbb{E}\left[f(X_{(n+1)\wedge\tau})|\mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n\right] = p_{X_n}f(X_n+1) + r_{X_n}f(X_n) + q_{X_n}f(X_n-1).$$

Pour conclure, il suffit donc de vérifier, pour tout $j \geq 1$, la relation

$$p_j f(j+1) + r_j f(j) + q_j f(j-1) = f(j).$$

En remplaçant r_j par $1 - p_j - q_j$, elle équivaut à

$$p_j(f(j+1) - f(j)) = q_j(f(j) - f(j-1)),$$

qui est facile à vérifier.

Si la somme considérée est finie, alors f est bornée, donc la martingale $f(X_{n\wedge\tau})$ converge p.s. et dans L^1 vers une limite M_∞ avec $\mathbb{E}[M_\infty] = f(x) > 0$ (on rappelle qu'on a choisi un point de départ $x > 0$). En particulier, on a $\mathbb{P}_x\left(M_\infty > 0\right) > 0$. Mais si $M_\infty > 0$, alors forcément $\tau = +\infty$. On a donc $\mathbb{P}_x(\tau = +\infty) > 0$, donc la chaîne X est transiente.

Si au contraire la somme est infinie, alors $\lim_{j\to+\infty} f(j) = +\infty$. De plus, $f(X_{n\wedge\tau})$ est une martingale positive, donc elle converge p.s.. Par conséquent, $X_{n\wedge\tau}$ est p.s. constante à partir d'un certain rang, donc soit $\tau < +\infty$, soit X_n est constante à partir d'un certain rang. Le second cas est impossible par irréductibilité, donc $\tau < +\infty$ p.s. et la chaîne est récurrente.

Exercice 4 (Temps de départ)
Soit (X_n) une chaîne de Markov sur un espace dénombrable E, de matrice de transition Q. On suppose que $Q(x,x) < 1$ pour tout $x \in E$. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ la filtration canonique et on définit

$$\tau = \inf\{n \geq 1,\ X_n \neq X_0\}.$$

1. Montrer que τ est un temps d'arrêt et que pour tout $x \in E$, τ est fini $\mathbb{P}_x$-p.s. Calculer les lois de τ et de X_τ sous $\mathbb{P}_x$.
2. On définit une suite de variables $(\tau_k)_{k\geq 0}$ par
$$\tau_0 = 0,\ \tau_1 = \tau,\ \tau_{k+1} = \inf\{n \geq \tau_k,\ X_n \neq X_{\tau_k}\}.$$
Montrer que les τ_k sont des temps d'arrêt finis $\mathbb{P}_x$-p.s.
3. On définit un processus (Y_n) par $Y_n = X_{\tau_n}$. Montrer que (Y_n) est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition.
4. On suppose que (X_n) est irréductible récurrente. Montrer que (Y_n) est aussi irréductible récurrente.
5. Soit μ une mesure invariante pour (X_n). A partir de μ, construire une mesure ν invariante pour (Y_n).

Solution de l'exercice 4

1. Pour tout $n \geq 0$, on a $\{\tau \leq n\} = \bigcup_{i=1}^n \{X_n \neq X_0\} \in \mathcal{F}_n$ donc τ est bien un temps d'arrêt. De plus, pour tout $n \geq 0$,
$$\mathbb{P}_x(\tau > n) = \mathbb{P}_x(X_0 = X_1 = \cdots = X_n) = Q(x,x)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$
donc $\tau < +\infty$ p.s.
2. On montre par récurrence sur k que τ_k est un temps d'arrêt. On l'a montré pour $k = 1$ dans la question précédente. De plus, pour tout $n \geq 0$ on a
$$\{\tau_{k+1} \leq n\} = \bigcup_{j=1}^{n-1} \bigcup_{i=j+1}^{n} \{\tau_k = j, X_i \neq X_j\} \in \mathcal{F}_n$$
par hypothèse de récurrence, donc τ_{k+1} est un temps d'arrêt. On montre également par récurrence sur k que τ_k est fini P_x-p.s. On l'a montré pour $k = 1$ dans la question précédente. De plus, si τ_k est fini P_x-p.s., alors $\tau_{k+1} = \tau_1 \circ \theta_{\tau_k}$ donc d'après la propriété de Markov forte appliquée à τ_k,
$$\mathbb{P}_x(\tau_{k+1} < +\infty) = \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\tau_1<+\infty} \circ \theta_{\tau_k} \mathbb{1}_{\tau_k<+\infty}\right] = \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_{X_{\tau_k}}\left[\mathbb{1}_{\tau_1<+\infty}\right] \mathbb{1}_{\tau_k<+\infty}\right] = \mathbb{E}_x\left[1 \times \mathbb{1}_{\tau_k<+\infty}\right] = 1.$$
3. Soient $y_0 = x, y_1, \ldots, y_k \in E$ tels que $y_{i+1} \neq y_i$ pour tout i. On a
$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Y_0 = y_0, \ldots, Y_n = y_k) \\
&= \sum_{t_1,\ldots,t_k\geq 1} \mathbb{P}(Y_0 = y_0, \tau_1 = t_1, Y_1 = y_1, \tau_2 - \tau_1 = t_2, \ldots, \tau_k - \tau_{k-1} = t_k, Y_k = y_k) \\
&= \sum_{t_1,\ldots,t_k\geq 1} \mathbb{P}(X_0 = \cdots = X_{t_1-1} = y_0, X_{t_1} = \cdots = X_{t_1+t_2-1} = y_1, \ldots, X_{t_1+t_2+\cdots+t_k} = y_k) \\
&= \sum_{t_1,\ldots,t_k\geq 1} Q(y_0,y_0)^{t_1-1}Q(y_0,y_1)Q(y_1,y_1)^{t_2-1} \ldots Q(y_{k-1},y_{k-1})^{t_k-1}Q(y_{k-1},y_k) \\
&= \frac{Q(y_0,y_1)}{1-Q(y_0,y_0)} \cdots \frac{Q(y_{k-1},y_k)}{1-Q(y_{k-1},y_{k-1})}.
\end{aligned}$$
Le processus Y est donc bien une chaîne de Markov, de matrice de transition $P(x,y) = \frac{Q(x,y)}{1-Q(x,x)}$ pour $x \neq y$ et $P(x,x) = 0$.

4. Soient $x \neq y \in S$. Comme X est irréductible, il existe $x_0 = x, x_1, \dots, x_k = y$ tels que $Q(x_{i-1}, x_i) > 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Quitte à retirer x_i quand $x_i = x_{i-1}$, on peut de plus supposer $x_i \neq x_{i-1}$ pour tout $1 \leq i \leq n$. On a alors $P(x_{i-1}, x_i) > 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$, donc Y est bien irréductible. Par ailleurs, comme tous les τ_k sont finis, un sommet est visité une infinité de fois par Y ssi il est visité une infinité de fois par y, donc Y est récurrente.

5. Pour tout $x \in E$, on pose $\nu(x) = (1 - Q(x,x))\,\mu(x)$. Pour tout $y \in E$, on a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in E} \nu(x) P(x,y) &= \sum_{x \in E \setminus \{y\}} (1 - Q(x,x))\,\mu(x) \frac{Q(x,y)}{1 - Q(x,x)} \\
&= \left(\sum_{x \in E} \mu(x) Q(x,y) \right) - \mu(y) Q(y,y) \\
&= \mu(y) - \mu(y) Q(y,y) \\
&= \nu(y),
\end{aligned}$$

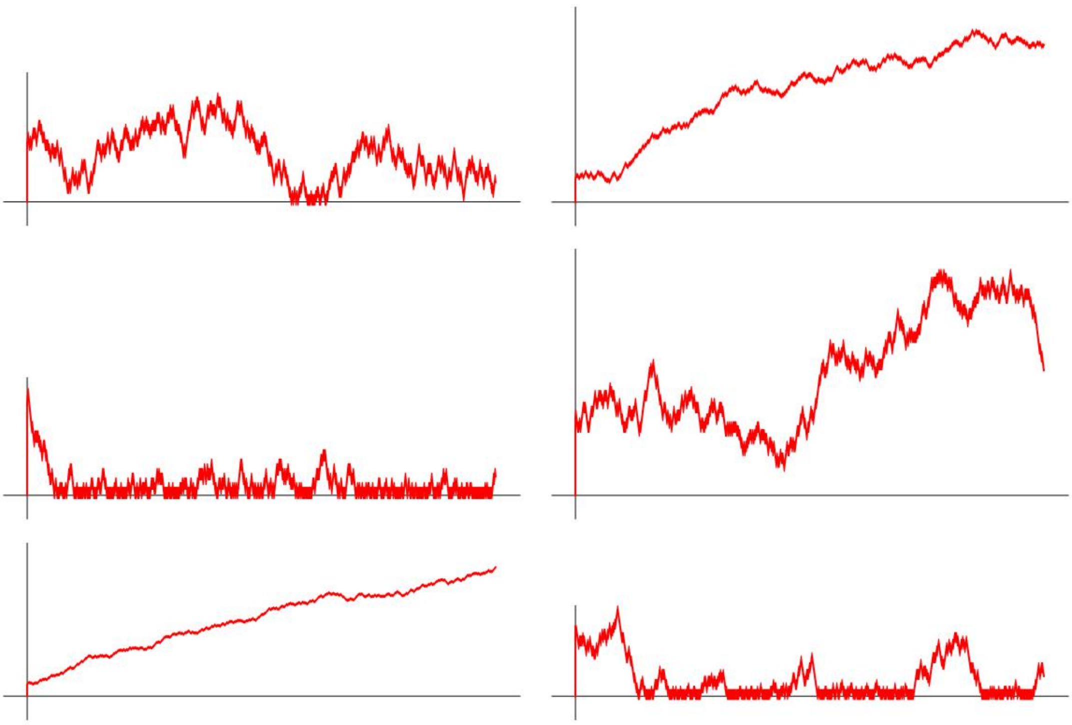
donc ν est bien invariante pour Y.

Exercice 5

Les jolies images ci-dessous sont des illustrations de l'exercice 3 (jusqu'à $n = 1000$, avec $X_0 = 20$ à chaque fois, les échelles verticales changent d'une image à l'autre). On a pris à chaque fois $r_i = 0$, et on a testé les valeurs suivantes pour $i \geq 1$:

1. $p_i = \frac{2}{5}$
2. $p_i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2i}$
3. $p_i = \frac{1}{2}$
4. $p_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2i}$
5. $p_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{i}}$
6. $p_i = \frac{3}{5}$

Retrouver l'image qui correspond à chaque cas.



Solution de l'exercice 5

- La première correspond à $p_i = \frac{1}{2}$. C'est la marche aléatoire simple, réfléchie en 0. Elle est récurrente nulle.
- La seconde correspond à $p_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{i}}$. Elle est transiente, et on peut vérifier que $X_n \sim \left(\frac{3n}{2}\right)^{2/3}$ p.s..
- La troisième correspond à $p_i = \frac{2}{5}$. Elle est récurrente positive.
- La quatrième correspond à $p_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2i}$. C'est la marche aléatoire "conditionnée à rester positive" (cf. jolie image du TD 5). Elle est transiente, mais on a $X_n \approx \sqrt{n}$ comme pour la marche simple.
- La cinquième correspond à $p_i = \frac{3}{5}$. Elle est transiente et d'après la loi des grands nombres, on a $X_n \sim \frac{n}{5}$ p.s..
- La sixième correspond à $p_i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2i}$. Elle est récurrente positive comme la troisième, mais met un peu plus de temps à "redescendre" en partant de haut.

Exercice 6 (La fourmi et la montre)
Une fourmi se promène sur une montre de la manière suivante : elle démarre sur le chiffre 0 et, toutes les minutes, elle se déplace avec proba $\frac{1}{2}$ d'un chiffre vers la gauche et avec proba $\frac{1}{2}$ d'un chiffre vers la droite. La fourmi s'arrête quand elle a visité tous les chiffres de la montre. On note C le dernier chiffre de la montre visité par la fourmi. Montrer que C est une variable uniforme sur $\{1, 2, \ldots, 11\}$.

Solution de l'exercice 6

Notons d'abord que C existe bien p.s. car la fourmi finit forcément par faire 12 pas consécutifs vers la gauche (argument déjà vu en TD, par exemple exercice 6 du TD6), donc par visiter tous les chiffres de la montre. Pour tout $i \in \mathbb{Z}\backslash 12\mathbb{Z}$, on note T_i le premier temps auquel la fourmi découvre i. Pour tout $i \in (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^*$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C = i) &= \mathbb{P}(T_i > T_{i-1}, T_i > T_{i+1}) \\
&= \mathbb{P}(T_{i-1} < T_{i+1} < T_i) + \mathbb{P}(T_{i+1} < T_{i-1} < T_i) \\
&= \mathbb{P}(T_{i-1} < T_{i+1})\,\mathbb{P}(T_{i+1} < T_i | T_{i-1} < T_{i+1}) + \mathbb{P}(T_{i+1} < T_{i-1})\,\mathbb{P}(T_{i-1} < T_i | T_{i+1} < T_{i-1}).
\end{aligned}$$

Mais d'après la propriété de Markov forte, conditionnellement à $\mathcal{F}_{T_{i-1}}$, la marche de la fourmi après T_{i-1} a la même loi qu'une marche aléatoire démarrée de $i-1$, donc $\mathbb{P}(T_{i+1} < T_i | T_{i-1} < T_{i+1})$ est égale à la probabilité qu'une marche démarrée en $i-1$ atteigne $i+1$ avant i. Par invariance par rotation, cette probabilité ne dépend pas de i, donc vaut $\mathbb{P}(T_2 < T_1)$. De même, on a

$$\mathbb{P}(T_{i-1} < T_i | T_{i+1} < T_{i-1}) = \mathbb{P}(T_{10} < T_{11}) = \mathbb{P}(T_2 < T_1),$$

où la dernière égalité s'obtient par symétrie. On obtient donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C = i) &= \mathbb{P}(T_{i-1} < T_{i+1})\,\mathbb{P}(T_2 < T_1) + \mathbb{P}(T_{i+1} < T_{i-1})\,\mathbb{P}(T_2 < T_1) \\
&= \mathbb{P}(T_2 < T_1).
\end{aligned}$$

Comme cela ne dépend pas de i, on en déduit que C est bien uniforme sur $\{1, 2, \ldots, 11\}$.