Processus Stochastiques Rémy Mahfouf
ENS Paris, 2021-2022 Bureau V2
remy.mahfouf@ens.fr

TD 9 : Mesures invariantes et théorèmes ergodiques

Vendredi 3 Décembre

Exercice 1 Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ la chaine de Markov sur $\{1,2,3,4,5,6\}$ dont la matrice de transition est

$$P := \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & 0 & 0 & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On note $T_i^+ := \inf\{n \geq 1, X_n = i\}$.

1. Déterminez les classes de récurrence/transience ainsi que les états récurrents et transients.
2. Déterminez les mesures invariantes puis calculer $\mathbb{E}_i[T_i^+]$ pour tout i.
3. En trouvant un système d'équations, déterminez $\mathbb{P}_1(T_6^+ < \infty)$ et $\mathbb{P}_2(T_6^+ < \infty)$.
4. Quel est le comportement asympotitque des suites $(\mathbb{P}_1(X_n = 4))_{n\geq 0}$ et $(\mathbb{P}_1(X_n = 5))_{n\geq 0}$?

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

1. Faire un dessin permet de voir que $\{3,5\}$ et $\{4,6\}$ forment les 2 classes de récurrence. Les autres états sont transients.
2. On peut réordonner les états dans l'ordre $1,2,4,6,3,5$ pour obtenir une matrice. Rechercher une mesure invariante revient à rechercher un vecteur propre à gauche de la matrice de transition (relabelisée). Cette matrice est

$$\tilde{P} := \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & 0 & 0 & \frac{3}{8} & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   On en déduit que l'ensemble des mesures invariantes peuvent s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire $t(0,0,0,\frac{2}{3},0,\frac{1}{3}) + (1-t)(0,0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0)$ avec $t \in [0,1]$. On a $\mathbb{E}_1[T_1^+] = \mathbb{E}_2[T_2^+] = \infty$, $\mathbb{E}_3[T_3^+] = \mathbb{E}_5[T_5^+] = 2$, $\mathbb{E}_4[T_4^+] = \frac{3}{2}$, $\mathbb{E}_6[T_6^+] = 3$. Une autre méthode (plus astucieuse) consiste à remarquer que toute mesure invariante induit une mesure invariante sur les classes de récurrence. Cela revient à rechercher des vecteurs propres sur des matrices 2×2 correspondant aux classes $\{3,5\}$ et $\{4,6\}$.
3. On conditionne selon la valeur du premiers pas de la marche issue de 1 pour obtenir par la propriété de Markov simple. En partant de 1 on a $\mathbb{P}_1(T_6^+ < \infty) = \frac{1}{4}\mathbb{P}_1(T_6^+ < \infty) + \frac{3}{8}\mathbb{P}_2(T_6^+ < \infty)$. Par le même procédé on obtient $\mathbb{P}_2(T_6^+ < \infty) = \frac{1}{10}\mathbb{P}_1(T_6^+ < \infty) + \frac{1}{2}\mathbb{P}_2(T_6^+ < \infty) + \frac{3}{10}$. On en déduit ainsi $\mathbb{P}_1(T_3 < \infty) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}_2(T_3 < \infty) = \frac{2}{3}$.

4. On commence par écrire la propriété de Markov forte pour le temps d'arret $T = T_6^+$ On a alors :

$$\mathbb{P}_1(X_n = 4) = \mathbb{E}_1[1_{T<\infty}1_{T\leq n}1_{X_n=4} \circ \theta_T] = \mathbb{E}_1[1_{T<\infty}1_{T\leq n}\mathbb{E}_6[1_{X_n=4}]]$$

Par le théorème ergodique, $\mathbb{E}_6[1_{X_n=4}]$ tend vers $\pi_{\{4,6\}}(4)$ tandis que le théorème de convergence dominée permet de conclure $\mathbb{P}_1(X_n = 4) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}_1(T < \infty)\pi_{\{4,6\}}(4)$ (où $\pi_{\{4,6\}}$ est l'unique mesure de probabilité invariante sur la classe $\{4, 6\}$). Le second revient à déterminer la probabilité d'entrer dans $\{3, 5\}$ à un temps pair ou impair.

Exercice 2 (Le roi fou)
On considère un roi se déplacant sur un échequier de manière aléatoire uniforme en partant depuis le coin gauche supérieur.

1. Quel est le temps moyen que le roi met pour revenir à sa position initiale ?
2. Quel est le temps moyen passé dans les 4 cases centrales avant de revenir à sa position initiale ?
3. Que dire si on remplace le roi par une tour ou un cavalier ?

Solution de l'exercice 2

1. La chaine est irreductible sur un espace d'états finis, elle admet une mesure invariante μ unique. On la cherche sous forme de mesure reversible ce qui impose pour $x \sim y$

$$\frac{\mu(x)}{\deg(x)} = \frac{\mu(y)}{\deg(y)} \tag{1}$$

on choisit donc $\mu(x) = \frac{1}{420}\deg(x)$.

2. En reprenant le cours, on a $\mathbb{E}_x[\sum_{t=0}^{T_x^+-1} 1_{X_t\in\text{centre}}] = \frac{\mu(\text{centre})}{\mu(x)} = 32/3$. Par le théorème ergodique, la proportion du temps passé dans ses casse au temps long est cette quantité est $\frac{32}{3\cdot 420}$
3. On reprend le même raisonnement, en modifiant le degré des pas élémentaires. On obtient aisni :
   — Pour la tour $\mathbb{E}_x[T_x^+] = 64$ et $\mathbb{E}_x[\sum_{t=0}^{T_x^+-1} 1_{X_t\in\text{centre}}] = 4$.
   — Pour le cavalier $\mathbb{E}_x[T_x^+] = 176$ et $\mathbb{E}_x[\sum_{t=0}^{T_x^+-1} 1_{X_t\in\text{centre}}] = 16$.

Exercice 3 (Durée de vie des ampoules)
Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant :

- $\mu = \mathbb{E}[Y_1] < +\infty$,
- $\mathrm{PGCD}\{n \geq 1 : \mathbb{P}(Y_1 = n) > 0\} = 1$.

On définit le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ par $X_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$X_n \ = \ \inf\{m \geq n \,|\, \exists k \geq 1, Y_1 + \ldots + Y_k = m\} - n\,.$$

1. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible et apériodique.
2. En déduire
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\exists k \geq 1,\, Y_1 + \ldots + Y_k = n) \ = \ \frac{1}{\mu}.$$
3. Quel est le rapport avec le titre de l'exercice ?

Solution de l'exercice 3

1. On remarque (faire un dessin !) que, pour tout $n \geq 0$,

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 & \text{si } X_n \neq 0, \\ Y_{k+1} - 1 & \text{si } X_n = 0 \text{ et } n = Y_1 + ... + Y_k. \end{cases}$$

Sur l'événement $\{Y_1 + ... + Y_k = n\}$ (qui est dans $\sigma(Y_1, ..., Y_k)$), les variables $X_0, ..., X_n$ sont $\sigma(Y_1, ..., Y_k)$-mesurables, et donc indépendantes de $X_{n+1} = Y_{k+1} - 1$. Sur l'événement $\{X_n \geq 1\}$, $X_{n+1} = X_n - 1$ p.s.. Cela implique que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition Q définie par

$$\begin{array}{lcll} Q(i, i-1) & = & 1 & \text{pour } i \geq 1 \\ Q(0, j) & = & \mathbb{P}(Y_1 = j+1) & \text{pour } j \geq 0 \\ Q(i, j) & = & 0 & \text{dans les autres cas} . \end{array}$$

Vérifions-le plus proprement. On a, pour tous $(x_0, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{N}$, si $x_n > 0$:

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, ..., X_{n+1} = x_{n+1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_{n+1} \neq x_n - 1, \\ \mathbb{P}(X_0 = x_0, ..., X_n = x_n) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $x_n = 0$, d'après l'indépendance énoncée ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_0 = x_0, ..., X_{n+1} = x_{n+1}) &= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(X_0 = x_0, ..., X_n = 0, Y_1 + ... + Y_k = n, X_{n+1} = x_{n+1}) \\ &= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(X_0 = x_0, ..., X_n = 0, Y_1 + ... + Y_k = n, Y_{k+1} = x_{n+1} + 1) \\ &= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(X_0 = x_0, ..., X_n = 0, Y_1 + ... + Y_k = n)\, \mathbb{P}(Y_{k+1} = x_{n+1} + 1) \\ &= \left(\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(X_0 = x_0, ..., X_n = 0, Y_1 + ... + Y_k = n) \right) \\ &\qquad \times \mathbb{P}(Y_1 = x_{n+1} + 1) \\ &= \mathbb{P}(X_0 = x_0, ..., X_n = 0)\, \mathbb{P}(Y_1 = x_{n+1} + 1) . \end{aligned}$$

L'espace d'états de $(X_n)_{n\geq 0}$ est $S = \{0, \ldots, m\}$ si $m = \sup\{i \geq 0 | \mathbb{P}(Y_1 = i+1) > 0\} < +\infty$ et $S = \mathbb{N}$ sinon. On vérifie que $(X_n)_{n\geq 0}$ est irréductible. Soient $i, j \in S$. Si $i > j$, alors $Q^{i-j}(i, j) = 1 > 0$. Si $i \leq j$, soit $\ell \geq j$ tel que $\mathbb{P}(Y_1 = \ell + 1) > 0$. Alors

$$Q^{i+\ell-j+1}(i, j) \geq Q^i(i, 0) Q(0, \ell) Q^{\ell-j}(\ell, j) > 0.$$

Enfin, pour tout $n \geq 1$,

$$Q^n(0, 0) \geq \mathbb{P}(Y_1 = n) ,$$

donc

$$L_0 := \{n \geq 1 \,|\, Q^n(0, 0) > 0\} \supset \{n \geq 1 \,|\, \mathbb{P}(Y_1 = n) > 0\} ,$$

où ce dernier ensemble est de PGCD 1, donc 0 est de période 1, donc la chaîne est apériodique.

2. D'après la question précédente Q admet une unique mesure stationnaire ν, et X converge en loi vers ν. La limite qui nous intéresse est donc

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \nu(0).$$

On doit donc calculer ν. Pour tout i, on a

$$\nu(i) = \nu(i + 1) + \nu(0)\mathbb{P}(Y_1 = i + 1) ,$$

d'où on déduit facilement, par récurrence sur i,

$$\nu(i) = \nu(0)\mathbb{P}(Y_1 > i).$$

On a donc

$$1 = \nu(0)\sum_{i\geq 0}\mathbb{P}(Y_1 > i) = \nu(0)\sum_{i\geq 1}\mathbb{P}(Y_1 \geq i) = \nu(0)\mu,$$

donc $\nu(0) = \frac{1}{\mu}$, d'où le résultat.

3. Imaginons que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ représente la durée de vie d'ampoules. Quand la k-ième ampoule ne fonctionne plus, on la remplace par la $(k+1)$-ième dont la durée de vie est Y_{k+1}. L'exercice montre qu'asymptotiquement, la probabilité d'avoir à changer une ampoule à l'instant n est l'inverse de la durée de vie moyenne des ampoules, ce qui est assez intuitif.

Exercice 4 (Un théorème de Polya)

On considère la marche simple issue de 0 sur $\mathbb{Z}^d$.

1. Si $d = 1$, calculez $Q_n(0,0)$ pour $n \geq 1$ et en déduire que la chaîne est récurrente.
2. Si $d = 2$, calculez $Q_n(0,0)$ pour $n \geq 1$ en déduire que la chaîne est récurrente.
   (*Indication* : On tournera la tête).
3. Si $d \geq 3$, montrer que pour $n \geq 0$ on a

$$Q_{2n}(0,0) = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\sum_{k_1+\ldots+k_d=n}\frac{1}{d^{2n}}\binom{n}{k_1,\ldots,k_d}^2$$

   En déduire que la chaine en transiente. (*Indication* : $\max\limits_{k_1+\ldots+k_d=n}\binom{n}{k_1,\ldots,k_d} = \mathcal{O}\big(\frac{d^n}{n^{\frac{d-1}{2}}}\big)$).

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>

1. C'est un calcul usuel qui donne $Q_{2n}(0,0) = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} \sim Cn^{-\frac{1}{2}}$. La marche est récurrente.
2. En considérant les 2 projection de la marche sur les diagonales $y = \pm x$ on obtient 2 marches indépendantes sur $\mathbb{Z}$, puis $Q_{2n}(0,0) = [\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}]^2 \sim C'n^{-1}$. La marche est récurrente.
3. Le calcul est direct et l'asympotique donne $Q_{2n}(0,0) = \mathcal{O}(n^{-\frac{3}{2}})$, ce qui assure que le potentiel est fini puis que la marche est transiente.

Exercice 5 (La fourmi et la montre)

Une fourmi se promène sur une montre de la manière suivante : elle démarre sur le chiffre 0 et, toutes les minutes, elle se déplace avec proba $\frac{1}{2}$ d'un chiffre vers la gauche et avec proba $\frac{1}{2}$ d'un chiffre vers la droite. La fourmi s'arrête quand elle a visité tous les chiffres de la montre. On note C le dernier chiffre de la montre visité par la fourmi. Montrer que C est une variable uniforme sur $\{1, 2, \ldots, 11\}$.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u>

Notons d'abord que C existe bien p.s. car la fourmi finit forcément par faire 12 pas consécutifs vers la gauche (argument déjà vu en TD), donc par visiter tous les chiffres de la montre. Pour tout $i \in \mathbb{Z}\backslash 12\mathbb{Z}$, on note T_i le premier temps auquel la fourmi découvre i. Pour tout $i \in (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^*$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C = i) &= \mathbb{P}(T_i > T_{i-1}, T_i > T_{i+1}) \\
&= \mathbb{P}(T_{i-1} < T_{i+1} < T_i) + \mathbb{P}(T_{i+1} < T_{i-1} < T_i) \\
&= \mathbb{P}(T_{i-1} < T_{i+1})\,\mathbb{P}(T_{i+1} < T_i | T_{i-1} < T_{i+1}) + \mathbb{P}(T_{i+1} < T_{i-1})\,\mathbb{P}(T_{i-1} < T_i | T_{i+1} < T_{i-1}).
\end{aligned}$$

Mais d'après la propriété de Markov forte, conditionnellement à $\mathcal{F}_{T_{i-1}}$, la marche de la fourmi après T_{i-1} a la même loi qu'une marche aléatoire démarrée de $i-1$, donc $\mathbb{P}(T_{i+1} < T_i | T_{i-1} < T_{i+1})$ est égale à la probabilité qu'une marche démarrée en $i-1$ atteigne $i+1$ avant i. Par invariance par rotation, cette probabilité ne dépend pas de i, donc vaut $\mathbb{P}(T_2 < T_1)$. De même, on a

$$\mathbb{P}(T_{i-1} < T_i | T_{i+1} < T_{i-1}) = \mathbb{P}(T_{10} < T_{11}) = \mathbb{P}(T_2 < T_1),$$

où la dernière égalité s'obtient par symétrie. On obtient donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C=i) &= \mathbb{P}(T_{i-1}<T_{i+1})\,\mathbb{P}(T_2<T_1)+\mathbb{P}(T_{i+1}<T_{i-1})\,\mathbb{P}(T_2<T_1) \\ &= \mathbb{P}(T_2<T_1)\,. \end{aligned}$$

Comme cela ne dépend pas de i, on en déduit que C est bien uniforme sur $\{1,2,\ldots,11\}$.
Remarque On peut déduire de la fin de la preuve que $\mathbb{P}(T_2<T_1)=\frac{1}{11}$, c'est-à-dire que pour la marche simple sur $\mathbb{Z}$ on a $\mathbb{P}(T_{-10}<T_1)=\frac{1}{11}$, résultat qu'on avait déjà obtenu par le théorème d'arrêt.