

Programme du groupe de lecture "Marches et graphes aléatoires"

Rémy MAHFOUF

Exposés basés sur les cours "**Random Walks and Graphs**" de Nicolas Curien et "**Introduction to percolation theory**" d'Hugo Duminil-Copin

Septembre 2021-Janvier 2022

Résumé

L'étude des marches et des graphes aléatoires reste l'un des domaines de recherche des probabilités les plus actifs actuellement. Après renormalisation, une marche aléatoire simple (disons sur \mathbb{Z}) "converge" vers une fonction continue aléatoire, que l'on appelle le mouvement Brownien. De même, lorsque l'on considère un graphe d'Erdős-Rényi de grande taille, dont les connections entre les sommets sont variables de Bernoulli indépendantes, ce dernier converge à son tour vers un objet aléatoire continu, dans un sens à préciser. L'objectif de ce groupe de lecture sera de comprendre les propriétés fines des marches et graphes aléatoires, qu'elles soient combinatoires, algébriques ou analytiques. En particulier, on présentera les correspondances entre ces différents objets, qui rendent souvent leur étude plus simple en choisissant le formalisme approprié.

Les séances se découperont en cinq grandes parties : nous commencerons par étudier la récurrence/transience des chaînes de Markov via le formalisme des réseaux électriques, puis nous nous concentrerons sur les marches aléatoires unidimensionnelles. Ensuite nous étudierons les arbres de Galton-Watson et leur liens avec les marches aléatoires. Nous terminerons avec l'étude des comportements typiques des graphes d'Erdős-Rényi de grande dimension.

Remarques générales

- **Contact** : Vous pouvez me joindre par mail à remy.mahfouf@ens.fr ou venir me voir au bureau V2 (je dors le matin, pas la peine d'essayer de venir).
- **Préparation d'un exposé** : Je vous demande de venir me voir au moins une fois dans la semaine précédant l'exposé, en ayant travaillé un peu avant, pour parler de ce que vous voulez traiter et répondre à vos questions. Si vous le souhaitez, vous pouvez faire l'exposé en entier devant moi.
- **Support** : J'ai mis sur ma page un exemplaire du cours de Nicolas Curien daté du 17 Juin 2020, il faudra utiliser celui-là pour les numérotations annoncées ici (le photocopié sur le site de l'auteur ayant vocation à évoluer au fur et à mesure du semestre). Je demande en particulier de me faire remonter les éventuelles erreurs typographiques afin que je puisse les transmettre. J'ai aussi mis sur ma page un exemplaire du cours d'Hugo Duminil-Copin daté du 7 Octobre 2018, pour lequel il faudra aussi suivre les numérotations.
- **Contenu des exposés** : Pour chaque chapitre, les \bullet ci-dessous indiquent ce qui doit être traité dans l'exposé et les \star indiquent ce qui peut être traité selon vos goûts personnels et le temps disponible. Il faut compter 1h15 par exposé pour laisser le temps pour des questions. **Il est très important de faire des exposés clairs avec des jolis dessins et de la couleur.**

Remarques sur le poly

- Les chapitres sont en général trop longs pour être traités entièrement en une séance. Il vaut donc mieux traiter peu de résultats dans un exposé, mais prendre son temps pour que les idées et les démonstrations soient bien claires. Prenez le temps de souligner la philosophie générale des preuves présentées.
- N'hésitez pas à lire le polycopié au-delà de ce qui est traité en groupe de lecture. En particulier, les résultats et chapitres qui ne seront pas traités sont très intéressants et permettent d'acquérir des connaissances culturelles sur les mathématiques actuelles.
- Si vous voulez traiter un chapitre ou un résultat qui n'est pas prévu dans les lignes qui suivent, n'hésitez pas à me demander, le programme est négociable!

I Chaînes de Markov et réseaux électriques

0 Introduction (24 Septembre, Rémy Mahfouf)

- Rappels de base en probabilités discètes
- Fonction de partition d'une distribution de probabilité
- Chaînes de Markov
- Fonctions harmoniques et mesures invariantes.

1 Réseaux électriques (1 Octobre, Timothé Ringard)

- Rappels sur les réseaux électriques : potentiel, courant, flux, loi d'Ohm (1.2)
- Interpretation probabiliste, courant et résistance effective (1.2.2)
- Réseaux équivalents (1.2.3)
- Energie et principes de Dirichlet et Thomson (Thm 1.8 et 1.9)
- ★ Lien entre résistance et commutation du courant (Thm 1.5)
- ★ Interpretation probabiliste du courant (Prop 1.6)
- ★ Monotonité de Rayleigh (Cor 1.10)

2 Récurrence et transience (8 Octobre, Timothée Rocquet)

- Récurrence et résistance (2.1)
- Ensembles de coupure de Nash-Williams (2.2.1)
- Théorème de Lyons et récurrence sur \mathbb{Z}^d (Thm 2.2)
- ★ Invariance via quasi-isométries (2.3.1 , 2.3.2)

II Marches aléatoires

3 Récurrence et oscillations (22 Octobre, Léonie Kittel)

- Définition, marche sur réseau, support (Prop 3.1)
- Propriété de Markov et loi de Hewitt-Savage (3.1.2)
- Condition de récurrence (Prop 3.1)
- Oscillations et drift (3.2)
- Records (Prop 3.4)
- ★ Exercice 3.1

4 Marches à incréments intégrables et lois stables (29 Octobre, Astrid Thollet)

- Récurrence/transience pour des incréments intégrables (Thm 3.5)
- Egalité de Wald (Thm 3.6)
- Lois stables (3.4.1)
- Queues lourdes (Prop 3.7)
- ★ Exercice 3.3
- ★ Exercice 3.6

5 Marches sur \mathbb{Z}^d (19 Novembre, Thomas Serafini)

- Transformée de Fourier, apperiodicité (Lem 7.1 et 7.2)
- Critere simple de Chung-Fuchs (Thm 7.5)
- Classification des marches sur \mathbb{Z}^d (Cor 7.7)
- Théorème local limite en dimension 1 (Thm 7.8)
- ★ Anti-concentration (Thm 7.3)
- ★ Critère de Chung-Fuchs general en dimension 1 (Lem 7.6)
- ★ Exercice 3.6

6 Théorie du renouvellement (26 Novembre, Marius Berthoumieux)

- Théorème d'Erdős-Feller-Pollard (Thm 6.1)
- Preuve du Thm 6.1 via la combinatoire analytique (6.1.1 , 6.1.2)
- Processus de renouvellement (Prop 6.3 , Lem 6.4 , Prop 6.6))
- Argument de couplage (6.2.2)
- ★ Argument general très simple (6.3)
- ★ Extension (Prop 6.7)

III Arbres de Galton-Watson

7 Arbres de Galton-Watson et marche de Lukasewitch (3 Décembre, Gaspard Chone-Ducasse)

- Arbres plan (9.1.1)
- Arbres de Galton-Watson (9.1.2)
- Marche de Lukasiewicz (9.2.1 , Prop 9.1)
- Probabilité d'extinction (Thm 9.2)
- ★ Exercice 9.4
- ★ Inversion de Lagrange (Thm 9.3)

8 Arbres de Galton-Watson et graphes Caley (10 Décembre, Hugo Nouaille)

- Comptage d'arbres de degré prescrit (Thm 9.4 , Cor 9.5)
- Arbres tirés uniformement (Prop 9.6)
- Poisson-Galton-Watson et arbres de Caley (Prop 9.8 , Cor 9.9)
- Fonction de contour (9.4)
- ★ Exercice 9.11
- ★ Exercice 9.12

IV Graphes d'Erdős-Rényi

9 Transition de phase des graphes d'Erdős-Rényi, (Tom Garcia-Sanchez + qqn 10 et 17 Décembre)

Transition de phase

- Transition de phase brutale pour la connectivité (Def 11.2 , Thm 11.2)
- Transition de phase brutale pour la grande composante connexe (Thm 11.4)
- Processus d'exploration (Prop 11.5)
- Grandes déviations (Lem 11.6)
- ★ Exercice 11.1
- ★ Exercice 11.4

Grandes composantes connexes

- Bornes supérieures pour le cas sous-critique et critique (11.2.2)
- Preuve dans le cas surcritique (Lem 11.7 , Cor 11.8)
- Preuve complète de Thm 11.4 cas surcritique

V Percolation

10 Percolation de Bernoulli, (7 Janvier,

- Transition de phase de la percolation de Bernoulli (Thm 1.1, Ex 1.2)
- Couplage croissant (Prop 2.1, Cor 2.2)
- Inégalités FKG et BK (Prop 2.3 et 2.4, Cor 2.5, Prop 2.7)
- Ergodicité (Lem 2.8, Cor 2.9)

11 Percolation planaire critique (14 Janvier,)

- Unicité de la composante infinie (Thm 3.1, Prop 3.2)
- Décroissance exponentielle en phase sous-critique (Thm 3.3, Thm 3.7)
- Théorème de Kesten, Heuristiques, (Thm 4.1, Thm 4.3)
- Ergodicité (Lem 2.8, Cor 2.9)