Processus Stochastiques
ENS Paris, 2021-2022

Rémy Mahfouf
Bureau V2
remy.mahfouf@ens.fr

TD 0 : Révisions

Vendredi 10 Septembre

Exercice 1

1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. réelles qui converge en loi vers une constante déterministe a.
   (a) Montrez que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers a.
   (b) Soit $(b_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels. Montrez que la suite $(X_n + b_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une constante déterministe si et seulement si la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ converge vers une limite finie.
2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. réelles indépendantes de même loi de densité
$$f(x) = C\frac{|x|}{(1+x^2)^3}, \tag{1}$$
   où C est une constante. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n := X_1 + \cdots + X_n$.
   (a) Déterminez C.
   (b) Montrez que, si $\alpha > 1/2$, alors S_n/n^α converge en probabilité vers 0.
   (c) Que peut-on dire dans le cas $0 < \alpha < 1/2$?

Exercice 2 Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et de loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour $n \geq 1$, on pose
$$M_n := \max\left(\frac{1}{\sqrt{U_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{U_n}}\right). \tag{2}$$

1. Calculer la fonction de répartition de M_n.
2. Soit $p > 0$. Déterminer les valeurs de p telles que M_n a un moment d'ordre p fini.
3. Montrer que $M_n/\sqrt{n}$ converge en loi quand $n \to \infty$ vers une variable aléatoire dont on précisera la fonction de répartition et la densité.

Exercice 3 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement ditribuées définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que $X_1 \in L^2(\mathbb{P})$, $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathbb{E}[X_1^2] = \sigma^2 < \infty$. On fixe un réel $\alpha > 0$ et, pour $n \geq 1$, on pose
$$S_n^{(\alpha)} := \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{i^\alpha}.$$

1. On suppose que $\alpha > 1/2$. Montrer que $(S_n^{(\alpha)})_{n\geq 1}$ converge dans L^2.

   Indication. On pourra utiliser le critère de Cauchy.

2. On suppose maintenant que $\alpha = 1/2$.

   (a) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $\xi \in [-\eta, \eta]$, on ait

   $$|\phi_{X_1}(\xi) \exp\left(\frac{\sigma^2 \xi^2}{2}\right) - 1| \leq \varepsilon \xi^2.$$

   (b) En déduire que la suite

   $$\left(\frac{S_n^{(1/2)}}{\sqrt{\ln n}}\right)_{n\geq 1}$$

   converge en loi vers une limite dont on précisera la loi.

Exercice 4 Rappelons la formule de Stirling: $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$ quand $n \to \infty$. Soient $p \in]0,1[$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = 1) = p.$$

Pour $n \geq 1$, posons $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ et définissons

$$U := \liminf_{n\to\infty} S_n \quad \text{et} \quad V := \limsup_{n\to\infty} S_n.$$

1. Quelle est la loi de S_n? Donnez son espérance et sa variance.

2. (a) Donnez un équivalent de $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$ lorsque n tend vers l'infini.

   (b) Dans le cas non symétrique où $p \neq 1/2$, en déduire que, presque sûrement, la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ ne visite 0 qu'un nombre fini de fois.

3. Montrez que V est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

4. (a) L'événement $\{V \leq 100\}$ est-il un événement asymptotique pour la suite $(X_n)_{n\geq 1}$?

   (b) Montrez que $\mathbb{P}(V = +\infty)$ vaut 0 ou 1.

5. (a) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Que vaut $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n = k)$? Montrez que, pour tout $a \geq 0$,

   $$\mathbb{P}(|S_n| \leq a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

   (b) En déduire que $\mathbb{P}(\exists a > 0 : \forall n \geq 1, |S_n| \leq a) = 0$.

6. Montrez alors que, pour tout $b > 0$, $\mathbb{P}(-b \leq U \leq V \leq b) = 0$.

7. Conclure finalement que exactement l'une des 3 probabilités suivantes vaut 1:

   $$\mathbb{P}(U = V = +\infty), \quad \mathbb{P}(U = V = -\infty), \quad \mathbb{P}(U = -\infty, V = +\infty),$$

   et préciser laquelle selon la valeur de p.

8. Dans le cas symétrique $p = 1/2$, montrez que, avec probabilité 1, la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ visite 0 un nombre infini de fois.

Exercice 5 Soit $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note N le nombre de retours en 0 de la marche avant l'instant $2n$ inclus : $N := \#\{k \in [1,n] : S_{2k} = 0\}$.

1. Soit $r \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{P}(N = r) = \mathbb{P}(N \geq r, S_{2n} = 0)$.

   Rappel. Pour $n \geq 0$, $\mathbb{P}(S_1 \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$.

2. Notons T_i est l'instant du i^{e} retour en 0, pour $i \geq 1$. Soit $r \in [0, n]$. Montrer que

$$\mathbb{P}(N = r) = \sum_{i=r}^{n} \mathbb{P}(T_i = 2n).$$

3. Soit $r \in [0, n]$. Montrer que

$$\mathbb{P}(N = r) = \frac{1}{2^{2n-r}} \binom{2n-r}{n-r}.$$

   Rappel. Pour $n \geq i$, on a

$$\mathbb{P}(T_i = 2n) = \frac{i}{2^{2n-i}(2n-i)} \binom{2n-i}{n-i}.$$

Exercice 6 Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites indépendantes de v.a. réelles indépendantes de loi normale centrée réduite. Posons

$$\forall n \geq 1, \quad Z_n \coloneqq \sqrt{X_n^2 + Y_n^2}.$$

1. Quelle est la loi de Z_n pour $n \geq 1$?
2. Montrez que $(Z_1 + \cdots + Z_n)/n$ converge en probabilité, et presque sûrement.
3. Montrez que $\liminf_{n\to\infty} \sqrt{n} Z_n = 0$ presque sûrement.

Exercice 7 Soit $\mu = (\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$ telle que $\mu_0 + \mu_1 < 1$. Le *processus de Galton-Watson* $(Z_n)_{n\geq 0}$ est défini récursivement par $Z_0 \coloneqq 1$ et, pour $n \geq 0$:

$$Z_{n+1} \coloneqq \sum_{j=1}^{Z_n} X_j^{(n)},$$

où les variables aléatoires $(X_j^{(n)})_{j,n\geq 0}$ sont i.i.d. de loi μ. Ainsi, $(Z_n)_{n\geq 0}$ modélise l'évolution d'une population dont à chaque instant n les individus meurent en donnant naissance à des nombres d'enfants i.i.d. de loi μ. On introduit la *fonction génératrice* ψ associée à μ :

$$\psi(s) \coloneqq \sum_{n\geq 0} \mu_n s^n, \quad s \in [0, 1].$$

On note finalement $m \coloneqq \sum_{n\geq 0} \mu_n n$ la moyenne du nombre d'enfants et $q \coloneqq \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N} : Z_n = 0)$ la probabilité que la population s'éteigne au bout d'un certain temps.

La question, que se sont posée Bienaymé en 1845 puis Galton et Watson en 1874, est la suivante : quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que la population ne s'éteigne jamais ? L'objectif ici est de démontrer leur résultat : $q < 1 \Leftrightarrow m > 1$.

Bien qu'ayant démontré ce résultat plus tôt, Bienaymé n'a pas laissé son nom à ce fameux processus. Ultime injustice, la démonstration de Galton et Watson était fausse.

1. Montrer que ψ est strictement croissante, que ψ' est strictement croissante et que $\psi(1) = 1$.
2. Pour $s \in [0, 1]$, on note $\psi_n(s) \coloneqq \mathbb{E}[s^{Z_n}]$. Montrer que $\psi_{n+1} = \psi_n \circ \psi$.
3. Montrer que $\mathbb{P}(T < \infty)$ est le plus petit point fixe de ψ. Conclure.