Processus Stochastiques Rémy Mahfouf
ENS Paris, 2021-2022 Bureau V2
remy.mahfouf@ens.fr

TD 1 : Convergence en loi

Vendredi 24 Septembre

Exercice 1 Quelques applications du cours

1. Soient $X_1 \dots X_n$ i.i.d de loi symétrique sur $\mathbb{R}$. On suppose que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_1$ pour tout $n \geq 1$. Déterminez la loi de X_1.

2. Soient X et Y, i.i.d de carré intégrable. On suppose que $\frac{X+Y}{\sqrt{2}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} X$. Déterminez la moyenne puis la loi de X.

3. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$. Peut-on conclure que $h(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} h(X)$?

4. Supposons que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$. Montrez que $\Phi_{X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi_X$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$. On commencera par montrer que pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe un réel $K > 0$ tel que $\mathbb{P}(X_n \notin [-K, K]) \leq \varepsilon$ uniformément en n. On conclura avec les théorèmes usuels d'analyse.

Exercice 2 Métrique de Lévy pour la convergence en loi
Soient F et G deux fonctions de distribution sur $\mathbb{R}$. On définit

$$d(F,G) := \inf\{\ \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, F(x-\delta) - \delta \leq G(x) \leq F(x+\delta) + \delta\}.$$

Montrez que d est une distance qui maitrise la topologie de la convergence en loi.

Exercice 3 Methode des moments

1. Soit X une variable aléatoire à valeur dans $[-M, M]$. Montrez que la loi de X est uniquement déterminée par la suite $\{\mathbb{E}[X^k]\}_{k\geq 1}$ de ses moments. Montrez ensuite que pour $X, X_1, X_2, \dots$ à support dans $[-M, M]$, on a

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X \iff \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{E}[X_n^k] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[X^k].$$

2. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables gaussiennes qui convergent en loi vers une variable aléatoire X. Montrez que X est gaussienne.

3. On suppose maintenant que la suite des moments converge. Montrez que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est tendue, puis qu'il existe une variable X dont les moments sont exactement les limites des moments des $(X_n)_{n\geq 1}$ (on utilisera le théorème de représentation de Skorokhod).

4. Montrez qu'en général il n'y a pas convergence en loi.

Exercice 4 Une loi infiniement divisible
On veut montrer que $\xi \mapsto \exp(-|\xi|^\alpha)$ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire lorsque $\alpha \in]0,2[$. On rappelle que sur $\mathbb{D}(1,1)$ on a

$$(1-z)^\beta = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-n+1)}{n!} z^n.$$

1. Montrez que si ϕ est une fonction caracteristique et $n \in \mathbb{N}$, alors ϕ^n l'est aussi. Montrez que si $\phi_1, \phi_2, \ldots$ sont des fonctions caracteristiques et que $\sum_n p_n = 1$ avec $p_n \geq 0$, alors $\sum_n p_n \phi_n$ est encore une fonction caracteristique.

2. Montrez que pour $\alpha \in]0,2[$ et $\psi(t) = 1 - (1-\cos(t))^{\alpha/2}$ on a

$$\psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos^n(t)$$

avec $\sum_n p_n = 1$ puis que ψ est encore une fonction caracteristique.

3. Montrez que pour $\xi \in \mathbb{R}$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \psi(\xi\sqrt{2}n^{-1/\alpha})^n = \exp(-|\xi|^\alpha),$$

et en déduire que $\exp(-|\xi|^\alpha)$ est à son tour une fonction caracteristique. Soient $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d de fonction caracteristique $\exp(-|\xi|^\alpha)$. Montrez que $n^{-1/\alpha}(X_1 + \ldots + X_n) \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_1$. Que dire du comportement asymptotique de la marché simple d'incréments de loi X_1?

4. Montrez pour X, X' deux variables i.i.d, on a $|\phi_X(\xi)|^2 = \mathbb{E}[e^{i\xi(X-X')}]$. En déduire que si X n'est pas constante, il existe $\delta, \varepsilon > 0$ tel que $|\phi_X(\xi)| \leq 1 - \varepsilon\xi^2$ pour $\xi \in [-\delta, \delta]$.

5. Montrez que si $|\phi_X(\xi)| = 1$ sur $[-\delta, \delta]$, alors $|\phi_X(\xi)| = 1$ sur $\mathbb{R}$. Montrez aussi que pour X, X' i.i.d., on a $X + X' \stackrel{\mathcal{L}}{=} X$ implique $X = 0$ presque surement. Conclure que $\xi \mapsto \exp(-|\xi|^\alpha)$ n'est pas la fonction caracteristique d'une loi de probabilité lorsque $\alpha > 2$.

Exercice 5 Theoreme local limite
On se donne une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ i.i.d de fonction caractéristique $\phi \in L^1$. On suppose $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathbb{E}[X_1^2] = 1$ et on pose $S_n = \sum_i^n X_i$.

1. Montrez que S_n admet une densité f_n donnée par $f_n(x) := \frac{1}{2\pi}\int e^{-itx}\phi^n(t)dt$.

2. Montrez que $\lim_{t\to\pm\infty} \phi(t) = 0$ puis que pour $[\varepsilon, K] \in \mathbb{R}_+^\star$, on a $\sup_{[\varepsilon,K]} |\phi| < 1$.

3. Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} f_n(\sqrt{n}x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.
Indication : On découpera l'intégrale.

Exercice 6 Inversion de Fourier
On veut montrer que pour X variable aléatoire réelle telle que $\Phi_X \in L^1(\mathbb{R})$, alors X admet une densité continue bornée f_X donnée par

$$f_X(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\Phi_X(t)dt.$$

1. Montrez que f_X définie ci-dessus est bien continue, bornée, puis déterminer une variable X_0 telle que l'identitée ci-dessus soit vraie.

2. Montrez que le resultat reste vrai pour εX_0 pour tout ε puis pour $\varepsilon X_0 + X$ pour toute variable X indépendante de X_0.

3. En supposant à présent que $\Phi_X \in L^1(\mathbb{R})$, conclure.

Exercice 7
Marche aléatoire sur le cercle Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables réelles i.i.d. On note $\bar{S}_n = X_1 + \cdots + X_n \equiv 1$. Déterminez la limite de $\bar{S}_n$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 8 Transformation de Laplace
Soit X une variable aléatoire positive. Pour $z \in \mathbb{H}$, on définit $L_X(z) := \mathbb{E}[e^{-zX}]$. Montrez que L_X est continue sur $\overline{\mathbb{H}}$ puis qu'elle est injective.