Processus Stochastiques Rémy Mahfouf
ENS Paris, 2021-2022 Bureau V2
remy.mahfouf@ens.fr

TD 10 : Théorème ergodique et convergence des chaînes

Vendredi 10 Décembre

Exercice 1 (Une suite de flips)
Soit $n \geq 4$. On considère un polygone régulier $\mathscr{P}_n$ à n sommets, numérotés de 1 à n. Une *triangulation* de $\mathscr{P}_n$ est une manière de tracer $n-3$ diagonales de $\mathscr{P}_n$ qui divisent $\mathscr{P}_n$ en $n-2$ triangles. On note $\mathscr{T}_n$ l'ensemble des triangulations de $\mathscr{P}_n$.

Si $t \in \mathscr{T}_n$ et d est une des diagonales de t, on peut supprimer d, ce qui crée un quadrilatère, et remplacer d par l'autre diagonale de ce quadrilatère (on dit alors qu'on *flippe* d). On obtient ainsi une triangulation qu'on note $\mathfrak{flip}(t, d)$.

On se fixe $t_0 \in \mathscr{T}_n$ et on définit $(T_k)_{k\geq 0}$ de la manière suivante : $T_0 = t_0$ et, pour tout $k \geq 0$, conditionnellement à $(T_0, \ldots, T_k)$, on choisit uniformément une diagonale d_k de T_k et on pose $T_{k+1} = \mathfrak{flip}(T_k, d_k)$.

1. Vérifier que (T_k) est une chaîne de Markov sur $\mathscr{T}_n$ et qu'elle admet la mesure uniforme comme mesure stationnaire.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathscr{T}_n$, en partant de t, il est possible d'obtenir en un nombre fini de flips la triangulation où toutes les diagonales sont issues du sommet 1. En déduire que (T_k) est irréductible.
3. La chaîne (T_k) converge-t-elle vers la mesure uniforme ?

Exercice 2 (Rangement sur une étagère)
Chaque matin, un étudiant prend un des trois livres (numérotés de 1 à 3) posés sur son étagère. La probabilité qu'il choisisse le livre i est α_i, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, où $0 < \alpha_i < 1$ et $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, et les choix qu'il fait jour après jour sont indépendants. Le soir, il replace le livre qu'il a pris à gauche des autres, sans les déranger. Quel est le comportement asymptotique de p_n, la probabilité que le n-ième matin au réveil l'étudiant trouve ses livres rangés dans l'ordre $(1, 2, 3)$ de gauche à droite ?

Exercice 3 Soit X une chaîne de Markov irreductible récurrente positive sue E. On note μ son unique de mesure de probabilité invariante. On se donne une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ tel que $\int_E |f| d\mu < \infty$. On définit l'équation de Poisson relative à f d'inconnue g (que l'on recherche intégrable) par

$$g = f + Qg. \tag{1}$$

1. Montrez que si l'équation de Poisson relative à f admet une solution, alors $\int_E f d\mu = 0$.
2. Montrez que deux solutions de (1) différent d'une constante additive.
3. On se fixe $z \in E$. On pose $T_y = \inf\{n \geq 1, X_n = y\}$ et on définit pour $x \in E$

$$g(x) := \mathbb{E}_x[\sum_{n=0}^{T_z - 1} f(X_n)]. \tag{2}$$

   Montrez que g est finie sur E, nulle en z et qu'elle est solution de (1).

Exercice 4 (Un contre-exemple)
On note G le graphe $\mathbb{Z}^3$, auquel on a recollé en 0 une copie de $\mathbb{N}$. Plus formellement, l'ensemble des sommets de G est $\mathbb{Z}^3 \cup \mathbb{N}^*$, et deux sommets x et y de G sont reliés si et seulement si x et y sont voisins dans $\mathbb{Z}^3$, ou x et y sont voisins dans $\mathbb{N}^*$, ou $x = 0 \in \mathbb{Z}^3$ et $y = 1 \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que toute fonction harmonique bornée sur G est constante.
2. Montrer qu'il existe une fonction harmonique positive non-constante sur G.

Exercice 5 (Les parapluies)
Michel possède k parapluies qu'il garde soit chez lui, soit dans son bureau. Le matin, avant d'aller au travail, il regarde par la fenêtre le temps qu'il fait :
— s'il fait beau, il ne prend pas de parapluie ;
— s'il pleut et qu'il a un parapluie chez lui, il prend le parapluie et va au travail ;
— s'il pleut et qu'il n'y a plus de parapluie, il décide de rester chez lui.
Le soir, il fait la même chose (s'il pleut et qu'il n'a pas de parapluies, il décide de rentrer quand même). On suppose que chaque demi-journée, il pleut avec probabilité p et il fait beau avec probabilité $1-p$ avec $0 < p < 1$, et que de plus, les météos des demi-journées sont indépendantes. Michel souhaite ne rater en moyenne qu'une journée de travail par mois. Sachant qu'il pleut 111 jours par an à Paris, combien de parapluies doit-il posséder pour cela ?