**Processus Stochastiques** Rémy Mahfouf
*ENS Paris*, 2021-2022 Bureau V2
remy.mahfouf@ens.fr

# TD 11 : Temps d'atteinte et fonctions harmoniques

Vendredi 17 Décembre

**Exercice 1** (Temps d'atteinte depuis la mesure invariante)
On se donne une chaîne de Markov $X$ irreductible récurrente positive de matrice de transition $Q$. On pose $T_{x,0} := \inf\{n \geq 0 : X_n = x\}$, $T_x := \inf\{n \geq 1 : X_n = x\}$ et de manière plus générale on définit $T_{x,m} := \inf\{n \geq m : X_n = x\}$. On note $\mu$ la probabilité invariante associée à la chaine.

1. Montrez que $\mathbb{E}_x[T_{x,m}] < \infty$ puis que pour $y \in E$ on a
$$\mu(y) = \frac{\mathbb{E}_x[\sum_{n=0}^{T_{x,m}-1} \mathbb{1}_{X_n=y}]}{\mathbb{E}_x[T_{x,m}]}.$$
2. Montrez que l'on a
$$\sum_{k=0}^{m-1} Q^k(x,x) = \mu(x)\mathbb{E}_x[T_{x,m}] = \mu(x)(m + \mathbb{E}_{\mu_m}[T_{x,0}]),$$
où $\mu_m$ est la loi définie par $\mu_m(y) := Q^m(x,y)$. En déduire que
$$\sum_{k=0}^{m-1} \left(Q^k(x,x) - \mu(x)\right) = \mu(x)\mathbb{E}_{\mu_m}[T_{x,0}].$$
3. On suppose de plus que $\sup_y E_y[T_x] < \infty$. Montrez que l'on a
$$\mathbb{E}_\mu[T_{x,0}] = \mathbb{E}_x[T_x] \sum_{k=0}^{\infty} \left(Q^k(x,x) - \mu(x)\right).$$
On a ainsi exprimé le temps de premier retour en $x$ en partant depuis la mesure stationnaire.
4. Considerons la chaîne de Markov des mots de taille 2 sur l'aphabet $\{A, B\}$ avec $A$ qui apparait à droite avec probabilité $p$. Ecrire la matrice de probabilité associée et montrez que $Q^2$ est une matrice dont les lignes sont toutes égales à la mesure invariante. En déduire que $\mathbb{E}_\mu[T_{AA}] = \frac{1+p}{p^2} - 2$, $\mathbb{E}_\mu[T_{AB}] = \mathbb{E}_\mu[T_{BA}] = \frac{1}{p(1-p)} - 2$. Que dire sur l'esperance du temps d'écriture de ABRACADABRA par un singe tapant au hasard sur un clavier de 26 lettres ?

**Exercice 2** (Fonctions harmoniques et martingales)
On rappelle qu'une fonction $f$ positive définie sur un espace d'états dénombrable $E$ (localement fini) est harmonique si pour tout $x \in E$ on a $f(x) = Qf(x)$.

1. Montrez que $f$ est harmonique ssi pour tout $x \in E$, le processus $(f(X_n))_{n\geq 0}$ est une martingale sous $\mathbb{P}_x$ pour la filtration naturelle. Montrez que pour tout $F \subseteq E$ et $G = E \backslash F$, $(f(X_{n\wedge T_G}))_{n\geq 0}$ est encore une martingale.
2. On définit le bord de $F$ (noté $\partial F$) l'ensemble des points de $F$ qui ont un voisins hors de $F$. Si aucun point ne vérifie cela le bord est l'infini. Montrez le principe du maximum i.e. si $h$ est harmonique sur $F$ fini, on a $\sup_{x\in F} h(x) = \sup_{x\in\partial F} h(x)$.

3. On suppose $F$ non vide et $T_G$ presque surement fini et on se donne une fonction $g : G \to \mathbb{R}$ bornée. Montrez que $h(x) := \mathbb{E}_x[g(T_G)]$ est l'unique fonction bornée qui est harmonique sur $F$ et coincide avec $g$ sur $G$. On dit que $h$ est solution du problème de Dirichelet avec condition aux bords $g$.
4. Soit $H_{G,y}(\cdot, y)$ la solution du problème de Dirichelet avec $g = \mathbb{1}_y(\cdot)$ (on suppose à nouveau que $T_G$ presque surement fini). Montrez que toute fonction harmonique s'écrit
$$h = \sum_{y \in G} h(y) H_{G,y}(\cdot, y).$$
5. Donnez l'exemple d'un graphe connexe où il existe un fonction harmonique bornée non constante.

**Exercice 3** (Les parapluies)
Michel possède $k$ parapluies qu'il garde soit chez lui, soit dans son bureau. Le matin, avant d'aller au travail, il regarde par la fenêtre le temps qu'il fait :
— s'il fait beau, il ne prend pas de parapluie ;
— s'il pleut et qu'il a un parapluie chez lui, il prend le parapluie et va au travail ;
— s'il pleut et qu'il n'y a plus de parapluie, il décide de rester chez lui.
Le soir, il fait la même chose (s'il pleut et qu'il n'a pas de parapluies, il décide de rentrer quand même). On suppose que chaque demi-journée, il pleut avec probabilité $p$ et il fait beau avec probabilité $1-p$ avec $0 < p < 1$, et que de plus, les météos des demi-journées sont indépendantes. Michel souhaite ne rater en moyenne qu'une journée de travail par mois. Sachant qu'il pleut 111 jours par an à Paris, combien de parapluies doit-il posséder pour cela ?