Processus Stochastiques Rémy Mahfouf
ENS Paris, 2021-2022 Bureau V2
remy.mahfouf@ens.fr

TD 2 : Fonctions caracteristiques et Théorème de Lindeberg

Vendredi 1er Octobre

Exercice 1 Une loi infiniement divisible
On veut montrer que $\xi \mapsto \exp(-|\xi|^\alpha)$ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire lorsque $\alpha \in]0,2[$. On rappelle que sur $\mathbb{D}(0,1)$ on a

$$(1-z)^\beta = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-n+1)}{n!} z^n.$$

1. Montrez que si ϕ est une fonction caracteristique et $n \in \mathbb{N}$, alors ϕ^n l'est aussi. Montrez que si $\phi_1, \phi_2, \ldots$ sont des fonctions caracteristiques et que $\sum_n p_n = 1$ avec $p_n \geq 0$, alors $\sum_n p_n \phi_n$ est encore une fonction caracteristique.

2. Montrez que pour $\alpha \in]0,2[$ et $\psi(t) = 1 - (1-\cos(t))^{\alpha/2}$ on a

$$\psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos^n(t)$$

   avec $\sum_n p_n = 1$ puis que ψ est encore une fonction caracteristique.

3. Montrez que pour $\xi \in \mathbb{R}$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \psi(\xi\sqrt{2}n^{-1/\alpha})^n = \exp(-|\xi|^\alpha),$$

   et en déduire que $\exp(-|\xi|^\alpha)$ est à son tour une fonction caracteristique. Soient $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d de fonction caracteristique $\exp(-|\xi|^\alpha)$. Montrez que $n^{-1/\alpha}(X_1 + \ldots + X_n) \overset{\mathcal{L}}{=} X_1$. Que dire du comportement asymptotique de la marche simple d'incréments de loi X_1?

4. Montrez pour X, X' deux variables i.i.d, on a $|\phi_X(\xi)|^2 = \mathbb{E}[e^{i\xi(X-X')}]$. En déduire que si X n'est pas constante, il existe $\delta, \varepsilon > 0$ tel que $|\phi_X(\xi)| \leq 1 - \varepsilon\xi^2$ pour $\xi \in [-\delta, \delta]$.

5. Montrez que si $|\phi_X(\xi)| = 1$ sur $[-\delta, \delta]$, alors $|\phi_X(\xi)| = 1$ sur $\mathbb{R}$. Montrez aussi que pour X, X' i.i.d., on a $X + X' \overset{\mathcal{L}}{=} X$ implique $X = 0$ presque surement. Conclure que $\xi \mapsto \exp(-|\xi|^\alpha)$ n'est pas la fonction caracteristique d'une loi de probabilité lorsque $\alpha > 2$.

Exercice 2 Application simples de la condition de Lindeberg

1. Soit $X_n \sim \mathrm{Bin}(n, p_n)$. Montrez que

$$\frac{X_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1) \qquad (1)$$

   si et seulement si $np_n(1-p_n) \to \infty$ lorsque $n \to \infty$.

2. Soit $(X_i)_{i\geq 0}$ une suite de variable i.i.d. centrées de variance σ^2. On se donne une suite $(z_{n,k})_{1\leq k\leq n}$ de constantes qui vérifient lorsque $n\to\infty$

$$\frac{\max\limits_{k\leq n} z_{n,k}^2}{\sum_{j=1}^n z_{n,j}^2} \longrightarrow 0.$$

Montrez que pour $T_n = \sum_{k=1}^n z_{n,k}X_k$, on a $\mathrm{Var}(T_n)^{-\frac{1}{2}}T_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$.

3. Soit $(X_{n,k})_{1\leq k\leq n}$ une suite de variables de Poisson de paramètre $\frac{k}{n}$. Soient $(Y_{n,k})_{1\leq k\leq n}$ une suite de variable indépendantes, centrées, telles que $X_{n,k}$ et $Y_{n,k}$ ont les mêmes moments d'ordre 2 et 3. Démontrez un théorème central limite pour $\sum_{k=1}^n Y_{n,k}$.

Exercice 3 Un contre exemple On considère une suite $(X_k)_{k\geq 1}$ de variables indépendantes centrées réduites telles que

$$\mathbb{P}(X_k = x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x = \pm 1, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{k^2} & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{2k^2} & \text{si } x = \pm k. \end{cases} \tag{2}$$

On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Montrez que la condition de Lindeberg n'est pas vérifiée puis déterminez la limite en loi de $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$.

Exercice 4 Le pré-mouvement Brownien

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d centrées de variance σ^2. On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ et pour tout réel $t \geq 0$

$$S_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]}$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x. Montrez que pour $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p$ on a

$$(S_{t_1}^{(n)}, S_{t_2}^{(n)}, \ldots, S_{t_p}^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} (U_1, U_2, \ldots, U_p),$$

et la loi limite est caracterisée comme il suit:

- Les variables aléatoires $U_1, U_2 - U_1, \ldots, U_p - U_{p-1}$ sont mutuellement indépendantes.
- Pour $j \leq p$, on a $U_j - U_{j-1}$ est une Gaussienne centrée de variance $\sigma^2(t_j - t_{j-1})$ (avec la convention $U_0 = 0$ presque surement).