Processus Stochastiques
ENS Paris, 2021-2022

Rémy Mahfouf
Bureau V2
remy.mahfouf@ens.fr

TD 3 : Esperance conditionnelle

Vendredi 8 Octobre

Exercice 1 (Calculs gentils)
Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables i.i.d. intégrables, et $S = \sum_{i=1}^n X_i$. Calculer $\mathbb{E}\left[S|X_1\right]$ et $\mathbb{E}\left[X_1|S\right]$.

Exercice 2 (Une question pas si facile)
On considère X une variable aléatoire intégrable et h une fonction telle que $h(X)$ est intégrables. Calculez $\mathbb{E}[h(X)||X|]$. On traitera d'abord le cas où X est symétrique, le cas où X admet une densité puis le cas général.

Exercice 3 (Un peu d'abstract nonsense)
Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs respectivement dans E et F. Soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On suppose que X est indépendante de $\mathcal{G}$ et que Y est $\mathcal{G}$-mesurable. Montrer que pour toute fonction mesurable $g : E \times F \to \mathbb{R}^+$, on a

$$\mathbb{E}\left[g(X,Y)|\mathcal{G}\right] = \int_E g(x,Y) P_X(\underset{\cdot}{\mathrm{x}})$$

où P_X désigne la loi de X. Le membre de droite est la composée de la variable aléatoire Y par l'application $\phi : y \to \int g(x,y) P_X(dx)$ (où ϕ est mesurable grâce au théorème de Fubini).

Exercice 4 (Espérance conditionnelle et convergence en probabilité)
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires positives sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une suite de sous-tribus de $\mathcal{F}$. On suppose que $\mathbb{E}\left[X_n|\mathcal{F}_n\right]$ converge en probabilité vers 0.

1. Montrer que X_n converge en probabilité vers 0.
2. Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 5 (Calculs moins gentils)
On se donne deux réels $a, b > 0$, et (X,Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}^+$ dont la loi est caractérisée par

$$\mathbb{P}(X = n, Y \leq t) = b \int_0^t \frac{(ay)^n}{n!} \exp(-(a+b)y) \underset{\cdot}{\mathrm{y}}.$$

Déterminer $\mathbb{E}[h(Y)|X = n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute fonction $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mesurable telle que $h(Y)$ soit intégrable, puis $\mathbb{E}[\frac{Y}{X+1}]$. Calculer ensuite $\mathbb{P}\left(X = n|Y\right)$ et enfin $\mathbb{E}[X|Y]$.

Exercice 6 (Espérance conditionnelle et positivité)
Soit X une variable aléatoire positive sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Montrer que $\{\mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right] > 0]\}$ est le plus petit ensemble $\mathcal{G}$-mesurable (aux ensembles négligeables près) qui contient $\{X > 0\}$.

Exercice 7 Soit X une variable intégrable sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Soit Y une v.a. $\mathcal{G}$-mesurable, on veut montrer que $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = Y$. Montrer que si Π est un ensemble de parties de Ω qui contient Ω, stable par intersections finies et dont la tribu engendrée est $\mathcal{G}$, il suffit de montrer

$$\forall \pi \in \Pi \ , \ \mathbb{E}[X \mathbb{1}_\pi] = \mathbb{E}[Y \mathbb{1}_\pi].$$

Exercice 8 (Indépendance conditionnelle)
On dit que deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans un espace $(E, \mathcal{E})$ sont indépendantes conditionnellement à $\mathcal{G}$ si pour toutes fonctions f et g de E dans $\mathbb{R}^+$ mesurables,

$$\mathbb{E}[f(X)\, g(Y)|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[f(X)|\mathcal{G}]\, \mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}].$$

1. Que signifie ceci si $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$? Si $\mathcal{G} = \mathcal{E}$?

2. Montrer que la définition précédente équivaut à : pour toute variable aléatoire Z positive $\mathcal{G}$-mesurable, pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ mesurables,

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)Z] = \mathbb{E}[f(X)Z\mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}]],$$

et aussi à: pour toute fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ mesurable,

$$\mathbb{E}[g(Y)|\sigma(\mathcal{G}, X)] = \mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}].$$