Processus Stochastiques Rémy Mahfouf
ENS Paris, 2021-2022 Bureau V2
remy.mahfouf@ens.fr

TD 4 : Espérance conditionnelle et martingales

Vendredi 15 Octobre

Exercice 1 (Une question pas si facile)
On considère X une variable aléatoire intégrable et h une fonction telle que $h(X)$ est intégrables. Calculez $\mathbb{E}[h(X)||X|]$. On traitera d'abord le cas où X est symétrique, le cas où X admet une densité puis le cas général.

Exercice 2
On se donne deux variables aléatoires réelles positives X et Y, et on suppose que $\mathbb{E}[X|Y] = Y$ et $\mathbb{E}[Y|X] = X$.

1. Montrer que si X et Y sont dans L^2, alors $X = Y$ p.s..
2. On se place maintenant dans le cas général. En étudiant des quantités de la forme $\mathbb{E}[Y \mathbb{1}_{X\leq a}]$, montrer que $X = Y$ p.s..

Exercice 3 (Convergence L^2 des martingales rétrogrades)
Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$, avec $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$. Soit X une variable aléatoire de carré intégrable.

1. Montrer que les variables $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{n+1}]$ sont orthogonales dans L^2, et que la série
$$\sum_{n\geq 0} (\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{n+1}])$$
converge dans L^2.
2. Montrer que si $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{n\geq 0} \mathcal{F}_n$, on a
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\infty] \quad \text{dans } L^2.$$

Exercice 4 (Vrai ou faux)
Soit (S_n) une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, S_1, \ldots, S_n)$. Lesquelles des variables suivantes sont des temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_n)$?

1. $T_1 = \min\{n \geq 0 | S_n = 2021\}$,
2. $T_2 = \min\{n \geq 2021 | S_n = S_{n-2021}\}$,
3. $T_3 = \min\{n \geq 0 | S_n = S_{n+2021}\}$,
4. $T_4 = \min\{n \geq T_1 | S_n = 0\}$,
5. $T_5 = \max\{n \in [\![0, 2021]\!] | S_n = 0\}$,
6. $T_6 = \min\{n \in [\![0, 2021]\!] | \forall m \in [\![0, 2021]\!], S_m \leq S_n\}$.

Exercice 5 (Ce qui peut arriver, arrivera)
Soit T un temps d'arrêt pour une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $n \geq 0$, on a p.s.

$$\mathbb{P}(T \leq n + n_0 | \mathcal{F}_n) > \varepsilon.$$

Montrer que T est fini presque sûrement et que $\mathbb{E}[T] < +\infty$.

Exercice 6 (À la pêche aux martingales)
Soit (S_n) une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$, et $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \cdots S_n)$.

1. Montrer que (S_n) est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.
2. Montrer que $(S_n^2 - n)$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.
3. Montrer que $(S_n^3 - 3nS_n)$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.
4. Soit $P(X, Y)$ un polynôme à deux variables. Montrer que $(P(S_n, n))$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$ si pour tous $s, n \in \mathbb{Z}$, on a
$$P(s + 1, n + 1) - 2P(s, n) + P(s - 1, n + 1) = 0.$$
5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(\alpha S_n - \beta n)$ est une martingale pour $(\mathcal{F}_n)$.

Exercice 7 (Temps de sortie)
Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$. Soient $a, b \geq 0$ et

$$T = \min\{n \in \mathbb{N}, S_n = -a \text{ ou } S_n = b\}.$$

On pourra admettre dans un premier temps que $T < +\infty$ p.s. (c'est une conséquence de l'exercice 4).

1. En utilisant la première martingale de l'exercice précédent et le théorème d'arrêt, montrer que
$$\mathbb{P}(S_T = b) = \frac{a}{a + b}.$$
2. En utilisant la seconde martingale de l'exercice précédent et le théorème d'arrêt, montrer que
$$\mathbb{E}[T] = ab.$$

Exercice 8 (Martingales et marche biaisée)
Soit $p \neq \frac{1}{2}$ et $(S_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire biaisée sur $\mathbb{Z}$, i.e. $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ avec X_i i.i.d. et $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p$.

1. Trouver α tel que α^{S_n} soit une martingale.
2. Soient a, b et T comme dans l'exercice précédent. Calculer $\mathbb{P}(S_T = b)$.

Exercice 9 (Un contre-exemple)
Trouver un processus $(M_n)_{n\geq 0}$ avec $E[|M_n|] < +\infty$ pour tout $n \geq 0$ et tel que $E[M_{n+1} \mid M_n] = M_n$ pour tout $n \geq 0$, mais sans que M soit une martingale.

Exercice 10 (Une fausse blague)
Un mathématicien, un économiste et un trader discutent dans un bar. L'économiste dit :
"La valeur en euros d'un dollar au cours du temps est une martingale ! Sinon, il serait possible de gagner de l'argent en moyenne, en achetant et vendant des dollars au bon moment !"
Le mathématicien répond :
"Mais si cela est vrai, d'après l'inégalité de Jensen pour l'espérance conditionnelle, la valeur en dollars d'un euro est une sous-martingale !"
Le trader ne dit rien, réfléchit quelques secondes, puis s'enfuit en courant pour aller acheter des euros. Qu'en pensez-vous ?