Processus Stochastiques Rémy Mahfouf
ENS Paris, 2021-2022 Bureau V2
remy.mahfouf@ens.fr

TD 5 : Martingales et théorèmes d'arrêts

Vendredi 22 Octobre

Exercice 1 (Temps de sortie)
Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$. Soient $a, b \geq 0$ et

$$T = \min\{n \in \mathbb{N}, S_n = -a \text{ ou } S_n = b\}.$$

On pourra admettre dans un premier temps que $T < +\infty$ p.s. (c'est une conséquence de l'exercice 5 de la semaine dernière).

1. En utilisant la première martingale de l'exercice 6 du TD précédent et le théorème d'arrêt, montrer que
$$\mathbb{P}(S_T = b) = \frac{a}{a+b}.$$
2. En utilisant la seconde martingale de l'exercice 6 du TD précédent et le théorème d'arrêt, montrer que
$$\mathbb{E}[T] = ab.$$

Exercice 2 (Martingales et marche biaisée)
Soit $p \neq \frac{1}{2}$ et $(S_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire biaisée sur $\mathbb{Z}$, i.e. $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ avec X_i i.i.d. et $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p$.

1. Trouver α tel que α^{S_n} soit une martingale.
2. Soient a, b et T comme dans l'exercice précédent. Calculer $\mathbb{P}(S_T = b)$.
3. En déduire la loi de $\min\{S_n | n \geq 0\}$.

Exercice 3 (Exemples et contre-exemples)

1. Trouver un exemple de martingale qui n'est pas bornée dans L^1.
2. Trouver un exemple de martingale qui converge p.s. mais n'est pas bornée dans L^1.
3. Trouver un exemple de martingale qui converge p.s. vers $+\infty$.
4. Trouver un exemple de martingale bornée dans L^1 mais qui ne converge pas dans L^1.

Exercice 4 (Urne de Polya)
À l'instant 0, une urne contient a boules blanches et $b = N_0 - a$ boules rouges. On tire une boule uniformément et on la remplace par deux boules de sa couleur, ce qui donne la composition de l'urne à l'instant 1. On répète ce procédé.

Pour $n \geq 1$, on note Y_n et $X_n = \frac{Y_n}{N_0+n}$ respectivement le nombre et la proportion de boules blanches dans l'urne à l'instant n. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$.

1. Donner $\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n + 1 | \mathcal{F}_n)$ et $\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n | \mathcal{F}_n)$.

2. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale qui converge p.s. vers une variable aléatoire, que l'on note U, et montrer que pour tout $k \geq 1$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n^k] = \mathbb{E}[U^k]$.

3. *Cas* $a = b = 1$. Montrer que pour tout $n \geq 0$, Y_n suit une loi uniforme sur $\{1, ..., n+1\}$. En déduire la loi de U.

4. *Cas général.* On fixe $k \geq 1$. On pose pour tout $n \geq 1$:

$$Z_n = \frac{Y_n(Y_n+1)\dots(Y_n+k-1)}{(N_0+n)(N_0+n+1)\dots(N_0+n+k-1)}.$$

   Montrer que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[U^k]$.

5. Montrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle bornée se développe en série entière sur $\mathbb{R}$ (on exhibera le développement en série entière). Expliquer pourquoi on a caractérisé la loi de U.

Exercice 5 (Processus de Galton–Watson surcritique)
Soit μ une loi sur $\mathbb{N}$ telle que $\sum_i i\mu(i) = m > 1$ et $\sum_i i^2\mu(i) < +\infty$. Soient $(Z_{n,i})_{n,i\in\mathbb{N}}$ des variables i.i.d. de loi μ. On définit le processus X par $X_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} Z_{n,i}.$$

1. Que peut décrire le processus X ?

2. On pose $p_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$ et $p = \mathbb{P}(\exists n, X_n = 0)$. Montrer une formule de récurrence de la forme $p_{n+1} = f(p_n)$, et en déduire que $p < 1$.

3. On pose $M_n = m^{-n}X_n$. Montrer que M est une martingale. En déduire que M_n converge p.s. vers une variable M_∞.

4. Trouver une relation de récurrence sur $\mathbb{E}[M_n^2]$, et en déduire que $M_n \to M_\infty$ dans L^2.

5. On note $q = \mathbb{P}(M_\infty = 0)$. Donner une équation sur q. En déduire que $q = p$. Qu'est-ce-que cela signifie sur la croissance de X_n ?