Processus Stochastiques Rémy Mahfouf
ENS Paris, 2021-2022 Bureau V2
remy.mahfouf@ens.fr

TD 6 : Martingales et théorèmes d'arrêts

Vendredi 29 Octobre

Exercice 1 (Processus de Galton–Watson surcritique)
Soit μ une loi sur $\mathbb{N}$ telle que $\sum_i i\mu(i) = m > 1$ et $\sum_i i^2\mu(i) < +\infty$. Soient $(Z_{n,i})_{n,i\in\mathbb{N}}$ des variables i.i.d. de loi μ. On définit le processus X par $X_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} Z_{n,i}.$$

1. Que peut décrire le processus X ?
2. On pose $p_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$ et $p = \mathbb{P}(\exists n, X_n = 0)$. Montrer une formule de récurrence de la forme $p_{n+1} = f(p_n)$, et en déduire que $p < 1$.
3. On pose $M_n = m^{-n}X_n$. Montrer que M est une martingale. En déduire que M_n converge p.s. vers une variable M_∞.
4. Trouver une relation de récurrence sur $\mathbb{E}[M_n^2]$, et en déduire que $M_n \to M_\infty$ dans L^2.
5. On note $q = \mathbb{P}(M_\infty = 0)$. Donner une équation sur q. En déduire que $q = p$. Qu'est-ce-que cela signifie sur la croissance de X_n ?

Exercice 2 (Une preuve de la loi forte des grands nombres)
Soit $(Z_n)_{n\geq1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que $\mathbb{E}[Z_n] = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $\sum_{n\geq1} \frac{\mathrm{Var}(Z_n)}{n^2} < +\infty$. On pose, pour $n \geq 1$,

$$M_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{Z_j}{j} \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{j=1}^{n} Z_j\,.$$

1. Montrer que M_n converge p.s. quand n tend vers $+\infty$.
2. En exprimant S en fonction de M, en déduire $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 0$.
3. Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}[X] = 0$. On considère une suite $(X_n)_{n\geq1}$ de variables aléatoires i.i.d. de même loi que X. Pour tout $n \geq 1$, on pose $Y_n = X_n \mathbb{1}_{|X_n|\leq n}$. Montrer que :
   (i) $\mathbb{E}[Y_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[X]$,
   (ii) $\mathbb{P}(\exists n \geq 1, \forall j \geq n, X_j = Y_j) = 1$,
   (iii) $\sum_{n\geq1} \frac{\mathrm{Var}(Y_n)}{n^2} < \infty$.
4. En déduire la loi forte des grands nombres.

Exercice 3 (Propriété de Liouville)
Soit $G = (V, E)$ un graphe infini, connexe et localement fini (i.e. où chaque sommet n'a qu'un nombre fini de voisins) et $h : V \to \mathbb{R}$. On dit que h est *harmonique sur* G si pour tout $x \in V$, on a

$$h(x) = \frac{1}{\deg(x)} \sum_{y \sim x} h(y),$$

où la somme est effectuée sur les voisins y de x et où $\deg(x)$ est le nombre de ces voisins. On dit que G vérifie la *propriété de Liouville* si toute fonction bornée harmonique sur G est constante.

1. Montrer que si h est harmonique et (X_n) est une marche aléatoire simple sur G, alors $(h(X_n))_{n\geq 0}$ est une martingale.

2. Montrer que si la marche aléatoire simple sur G est récurrente (i.e. si elle visite presque sûrement tous les points une infinité de fois), alors G vérifie la propriété de Liouville.

3. Soient $x, y \in \mathbb{Z}^d$ tels que $\sum_{i=1}^d x_i \equiv \sum_{i=1}^d y_i \pmod 2$. Montrer qu'il existe (X_n) et (Y_n) deux marches aléatoires simples (non indépendantes !) issues respectivement de x et y telles que p.s., pour n assez grand, $X_n = Y_n$.

4. En déduire que $\mathbb{Z}^d$ vérifie la propriété de Liouville.

5. Donner un exemple de graphe (connexe, localement fini) ne vérifiant pas la propriété de Liouville.

Indication: Pour la question 3, commencer par le cas $d = 1$ puis essayer d'adapter à d quelconque.

Exercice 4 (Théorème de Rademacher)
Le but de cet exercice est de montrer par une approche probabiliste que toute fonction lipschitzienne est primitive d'une fonction mesurable bornée. Soient X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz $L > 0$. Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$X_n = \lfloor 2^n X \rfloor 2^{-n} \qquad \text{et} \qquad Z_n = 2^n \left(f\left(X_n + 2^{-n}\right) - f(X_n) \right).$$

1. Montrer les égalités de tribus suivantes:

$$\sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n) = \sigma(X_n) \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{n\geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots) = \sigma(X).$$

2. Déterminer $\mathbb{E}[h(X_{n+1})|X_n]$ pour toute fonction $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mesurable continue. En déduire que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale bornée (où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ pour tout $n \geq 0$).

3. Montrer que (Z_n) converge p.s. et dans L^1 vers une variable aléatoire Z, puis qu'il existe une fonction $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée telle que $Z = g(X)$ p.s..

4. Calculer $\mathbb{E}[h(X)|X_n]$ pour toute fonction $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. En déduire que p.s.:

$$Z_n = 2^n \int_{X_n}^{X_n + 2^{-n}} g(u)\mathrm{d}u.$$

5. Conclure que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = f(0) + \int_0^x g(u)\mathrm{d}u$.

Exercice 5 (Modèle de Wright-Fisher)
Un gène a deux allèles α et β. On considère une population qui se renouvelle entièrement à chaque génération, le nombre d'individus restant fixe et égal à $n \geq 2$. On suppose que pour tout $k \geq 0$, à la génération $k+1$, chacun des n individus choisit son parent uniformément parmi les n individus de la génération k, indépendamment les uns des autres. On note X_k le nombre d'individus portant l'allèle α à la génération k, et $\mathcal{F}_k = \sigma(X_0, \ldots, X_k)$. On suppose $X_0 = a \in [\![1, n-1]\!]$.

1. Quelle est la loi de X_{k+1} conditionnellement à $\mathcal{F}_k$? En déduire que X est une martingale pour $(\mathcal{F}_k)_{k\geq 0}$.

2. Montrer que X converge p.s. vers une variable X_∞, et donner sa loi.

   On pose $\tau = \inf\{k | X_k = X_\infty\}$.

3. Calculer $\mathbb{E}\left[X_{k+1}(n - X_{k+1}) | \mathcal{F}_k\right]$ et trouver une martingale.

4. En déduire un encadrement de $\mathbb{E}[\tau]$. On pourra par exemple montrer

$$\mathbb{E}[\tau] = O(n \ln n).$$