Processus Stochastiques
ENS Paris, 2021-2022

Rémy Mahfouf
Bureau V2
remy.mahfouf@ens.fr

TD 7 : Chaînes de Markov

Vendredi 19 Novembre

1 Chaînes de Markov

Exercice 1 (Markov ou pas Markov ?)
Soit (S_n) une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$. Lesquels des processus suivants sont des chaînes de Markov sur $\mathbb{Z}$? Pour ceux qui le sont, donner la matrice de transition.

1. $A = (S_n)_{n\geq 0}$,
2. $B = (S_n + n)_{n\geq 0}$,
3. $C = \left(S_n + n^2\right)_{n\geq 0}$,
4. $D = (S_n + 10^n)_{n\geq 0}$,
5. $E = (S_n + (-1)^n)_{n\geq 0}$,
6. $F = (|S_n|)_{n\geq 0}$,
7. $G = \left(S_n^2 - n\right)_{n\geq 0}$,
8. $H = (S_{2n})_{n\geq 0}$,
9. $I = (X_n)_{n\geq 0}$ une arbre de Galton-Watson,
10. J avec $J_{n+1} = (J_n + 1)\xi_{n+1}$ où $\xi_j \sim \mathcal{B}(p)$ i.i.d.

Exercice 2 On dit qu'un graphe G est transitif si pour tous sommets u et v de G, il existe un automorphisme Φ de G tel que $\Phi(u) = v$ (autrement dit, les sommets de G jouent tous le même rôle). Soit G un graphe (fini ou infini) transitif et localement fini, et soit X une marche aléatoire simple sur G issue d'un sommet u.

1. Montrer que pour tout sommet v et tout $k \geq 0$, on a
$$\mathbb{P}\left(X_{2k} = u\right) \geq \mathbb{P}\left(X_{2k} = v\right).$$
2. En déduire que $\mathbb{P}\left(X_{2k} = u\right)$ est décroissante en k.

Exercice 3 (h-transformée d'une chaîne de Markov)
Soit S un ensemble dénombrable et $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur S de matrice de transition Q. Soit $h : S \to \mathbb{R}_+$. Soit P la matrice définie sur $S_+ = \{x \in S | h(x) > 0\}$ par la formule
$$P(i,j) = \frac{h(j)}{h(i)} Q(i,j).$$

1. Donner une hypothèse sur h qui garantit que P est la matrice de transition d'une chaîne de Markov sur S^+. Que signifie cette hypothèse si X est la marche aléatoire simple sur un graphe ? *On dit alors que P est la h-transformée de Q.*
2. Soit Y une chaîne de Markov de matrice de transition P. Déterminer la dérivée de Radon-Nikodým de la loi de $(Y_i)_{0\leq i\leq n}$ par rapport à celle de $(X_i)_{0\leq i\leq n}$.
3. On considère la marche aléatoire simple S sur $\mathbb{Z}$. On note $T_i = \inf\{n \geq 0 | S_n = i\}$. Pour $N > 0$ et $k \in [\![0, N]\!]$, on définit
$$\mathbb{P}_k^{(N)} = \mathbb{P}_k(\,\cdot\,| T_N < T_0).$$

(a) On rappelle que $\mathbb{P}_k(T_N < T_0) = \frac{k}{N}$. Montrer que sous $P_k^{(N)}$, $(S_{n\wedge T_N})_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition.

(b) Trouver une fonction $h : [\![0, N]\!] \to \mathbb{R}_+$ telle que la matrice de transition de la question précédente soit la h-transformée de la matrice de transition de la marche aléatoire simple.

(c) Proposer une définition de la "marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ conditionnée à rester positive".

Exercice 4 Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaine de Markov sur E. Pour $x \in E$ on pose $H_x := \inf\{n \geq 1 : X_n = x\}$ et $N_x = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{X_n = x}$.

1. Montrez que $\mathbb{P}_x(H_x < \infty) = 1 \iff N_x = \infty$ p.s . Montrez que $\mathbb{P}_x(H_x < \infty) < 1$ implique $\mathbb{E}_x[N_x] = \frac{1}{P_x(H_x = \infty)}$. Dans le premier cas on dit que x est réccurent, dans le second que x est transitoire.
2. On pose pour $x, y \in E$, $U(x, y) = E_x[N_y]$. Exprimer $U(x, y)$ en fonction des $Q^n(x, y)$ puis montrer que x est récurrent si et seulement si $U(x, x) = \infty$.
3. Montrer que $U(x, y) = \mathbb{P}_x(H_y < \infty)U(y, y)$. Que dire de l'ensemble des points récurrents ?
4. En supposant $E_x[N_y] = \infty$, quelles valeurs peut prendre $E_y[N_x]$?