Processus Stochastiques Rémy Mahfouf
ENS Paris, 2021-2022 Bureau V2
remy.mahfouf@ens.fr

TD 8 : Chaînes de Markov et classification des états

Vendredi 26 Novembre

Exercice 1 Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ issue de 0. Pour tout $i \geq 0$, on pose $T_i = \min\{n \geq 0 | S_n = i\}$ (on rappelle que tous les T_i sont finis p.s. par récurrence de S).

1. Montrer que les variables $T_{i+1} - T_i$ sont i.i.d.

2. On suppose maintenant que S est une marche biaisée négativement, i.e. les $S_{n+1} - S_n$ sont i.i.d. et
$$\mathbb{P}(S_{n+1} - S_n = -1) = 1 - \mathbb{P}(S_{n+1} - S_n = +1) > \frac{1}{2}.$$
Montrer sans calcul que $M = \max\{S_n | n \geq 0\}$ est une variable géométrique.

3. On se replace dans le cas non biaisé. Déduire de la question 1 que $\mathbb{E}[T_1] = +\infty$

Exercice 2 (Petites questions sur la classification des états)
On notera génériquement $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition Q à valeurs dans un espace d'états dénombrable S. Pour $x \in S$, on notera $N_x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{X_n=x\}}$.

1. Donner un exemple où l'ensemble des points visités par la chaîne issue de x n'est pas déterministe.

2. Donner un exemple où, sous $\mathbb{P}_x$, l'ensemble des points visités par la chaîne est p.s. toujours le même, sans que x soit récurrent. Donner un exemple où, de plus, l'ensemble des 3 premiers points visités en partant de x n'est pas déterministe.

3. Pour $x, y \in S$, est-il vrai que si y est récurrent et il existe n tel que $Q^n(x,y) > 0$, alors $N_y = +\infty$ $\mathbb{P}_x$-p.s. ?

4. Donner un exemple où il existe n tel que $Q^n(x,y) > 0$ mais $Q^m(y,x) = 0$ pour tout $m \geq 0$.

5. Montrer que pour $x, y \in S$, si $\mathbb{E}_x[N_y] = +\infty$, alors y est récurrent. La réciproque est-elle vraie ?

6. Peut-on avoir $0 < \mathbb{E}_x[N_y] < +\infty$, avec y récurrent ?

7. Si $\mathbb{E}_x[N_y] = +\infty$, quelles valeurs peut prendre $\mathbb{E}_y[N_x]$?

8. On suppose que pour tout $x \in S$, l'ensemble $V_x = \{y \in S \,|\, \exists n \text{ tel que } Q^n(x,y) > 0\}$ est fini. Montrer qu'il existe des états récurrents.

Exercice 3 (Chaîne de naissance et de mort)
Soit Q la matrice de transition sur $\mathbb{N}$ donnée par:

$$Q = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & q_3 & r_3 & p_3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

avec $p_0 > 0$, $p_0 + r_0 = 1$, ainsi que $p_i > 0$, $q_i > 0$ et $p_i + r_i + q_i = 1$ pour tout $i \geq 1$. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ de matrice de transition Q.

1. Montrer que X est irréductible.
2. On suppose que
$$\sum_{i\geq 1} \frac{p_0 \cdots p_{i-1}}{q_1 \cdots q_i} < +\infty\,.$$
Montrer que X admet une mesure de probabilité réversible π qu'on déterminera. Que peut-on en déduire sur X ?
3. On pose $f(j) = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{q_1 \ldots q_i}{p_1 \ldots p_i}$ (avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$) et $\tau = \inf\{n \geq 0 | X_n = 0\}$. Montrer que $f(X_{n\wedge\tau})$ est une martingale, et en déduire que X_n est récurrente si et seulement si
$$\sum_{i\geq 0} \frac{q_1 \ldots q_i}{p_1 \ldots p_i} = +\infty.$$

Exercice 4 (Temps de départ)
Soit (X_n) une chaîne de Markov sur un espace dénombrable E, de matrice de transition Q. On suppose que $Q(x,x) < 1$ pour tout $x \in E$. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ la filtration canonique et on définit

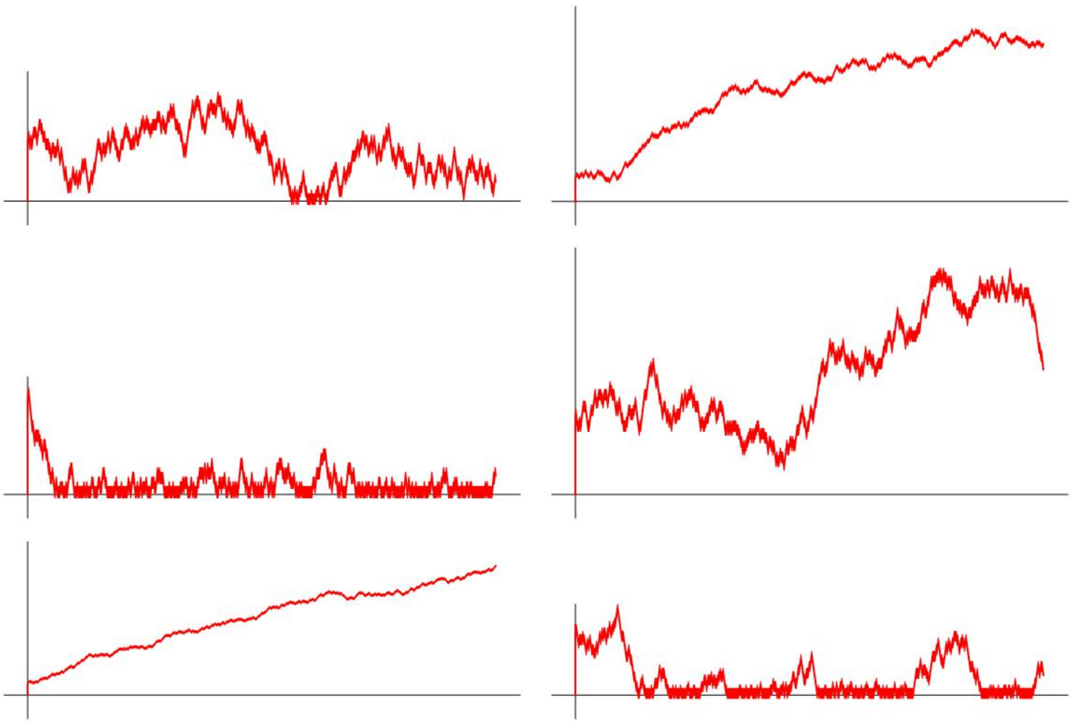
$$\tau = \inf\{n \geq 1,\ X_n \neq X_0\}.$$

1. Montrer que τ est un temps d'arrêt et que pour tout $x \in E$, τ est fini $\mathbb{P}_x$-p.s. Calculer les lois de τ et de X_τ sous $\mathbb{P}_x$.
2. On définit une suite de variables $(\tau_k)_{k\geq 0}$ par
$$\tau_0 = 0,\ \tau_1 = \tau,\ \tau_{k+1} = \inf\{n \geq \tau_k,\ X_n \neq X_{\tau_k}\}.$$
Montrer que les τ_k sont des temps d'arrêt finis $\mathbb{P}_x$-p.s.
3. On définit un processus (Y_n) par $Y_n = X_{\tau_n}$. Montrer que (Y_n) est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition.
4. On suppose que (X_n) est irréductible récurrente. Montrer que (Y_n) est aussi irréductible récurrente.
5. Soit μ une mesure invariante pour (X_n). A partir de μ, construire une mesure ν invariante pour (Y_n).

Exercice 5
Les jolies images ci-dessous sont des illustrations de l'exercice 3 (jusqu'à $n = 1000$, avec $X_0 = 20$ à chaque fois, les échelles verticales changent d'une image à l'autre). On a pris à chaque fois $r_i = 0$, et on a testé les valeurs suivantes pour $i \geq 1$:

1. $p_i = \frac{2}{5}$
2. $p_i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2i}$
3. $p_i = \frac{1}{2}$
4. $p_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2i}$
5. $p_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{i}}$
6. $p_i = \frac{3}{5}$

Retrouver l'image qui correspond à chaque cas.



Exercice 6 (La fourmi et la montre)
Une fourmi se promène sur une montre de la manière suivante : elle démarre sur le chiffre 0 et, toutes les minutes, elle se déplace avec proba $\frac{1}{2}$ d'un chiffre vers la gauche et avec proba $\frac{1}{2}$ d'un chiffre vers la droite. La fourmi s'arrête quand elle a visité tous les chiffres de la montre. On note C le dernier chiffre de la montre visité par la fourmi. Montrer que C est une variable uniforme sur $\{1, 2, \ldots, 11\}$.