Processus Stochastiques Rémy Mahfouf
ENS Paris, 2021-2022 Bureau V2
remy.mahfouf@ens.fr

TD 9 : Mesures invariantes et théorèmes ergodiques

Vendredi 3 Décembre

Exercice 1 Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ la chaine de Markov sur $\{1,2,3,4,5,6\}$ dont la matrice de transition est

$$P := \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & 0 & 0 & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On note $T_i^+ := \inf\{n \geq 1, X_n = i\}$.

1. Déterminez les classes de récurrence/transience ainsi que les états récurrents et transients.
2. Déterminez les mesures invariantes puis calculer $\mathbb{E}_i[T_i^+]$ pour tout i.
3. En trouvant un système d'équations, déterminez $\mathbb{P}_1(T_6^+ < \infty)$ et $\mathbb{P}_2(T_6^+ < \infty)$.
4. Quel est le comportement asympotitque des suites $(\mathbb{P}_1(X_n = 4))_{n\geq 0}$ et $(\mathbb{P}_1(X_n = 5))_{n\geq 0}$?

Exercice 2 (Le roi fou)
On considère un roi se déplacant sur un échequier de manière aléatoire uniforme en partant depuis le coin gauche supérieur.

1. Quel est le temps moyen que le roi met pour revenir à sa position initiale ?
2. Quel est le temps moyen passé dans les 4 cases centrales avant de revenir à sa position initiale ?
3. Que dire si on remplace le roi par une tour ou un cavalier ?

Exercice 3 (Durée de vie des ampoules)
Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant :

- $\mu = \mathbb{E}[Y_1] < +\infty$,
- $\mathrm{PGCD}\{n \geq 1 : \mathbb{P}(Y_1 = n) > 0\} = 1$.

On définit le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ par $X_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$X_n = \inf\{m \geq n \mid \exists k \geq 1, Y_1 + \ldots + Y_k = m\} - n\,.$$

1. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible et apériodique.
2. En déduire
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\exists k \geq 1,\, Y_1 + \ldots + Y_k = n) = \frac{1}{\mu}.$$
3. Quel est le rapport avec le titre de l'exercice ?

Exercice 4 (Un théorème de Polya)
On considère la marche simple issue de 0 sur $\mathbb{Z}^d$.

1. Si $d = 1$, calculez $Q_n(0,0)$ pour $n \geq 1$ et en déduire que la chaîne est récurrente.
2. Si $d = 2$, calculez $Q_n(0,0)$ pour $n \geq 1$ en déduire que la chaîne est récurrente. (*Indication* : On tournera la tête).
3. Si $d \geq 3$, montrer que pour $n \geq 0$ on a

$$Q_{2n}(0,0) = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} \sum_{k_1+\ldots+k_d=n} \frac{1}{d^{2n}} \binom{n}{k_1,\ldots,k_d}^2$$

En déduire que la chaine en transiente. (*Indication* : $\max\limits_{k_1+\ldots+k_d=n} \binom{n}{k_1,\ldots,k_d} = \mathcal{O}\big(\frac{d^n}{n^{\frac{d-1}{2}}}\big)$).

Exercice 5 (La fourmi et la montre)
Une fourmi se promène sur une montre de la manière suivante : elle démarre sur le chiffre 0 et, toutes les minutes, elle se déplace avec proba $\frac{1}{2}$ d'un chiffre vers la gauche et avec proba $\frac{1}{2}$ d'un chiffre vers la droite. La fourmi s'arrête quand elle a visité tous les chiffres de la montre. On note C le dernier chiffre de la montre visité par la fourmi. Montrer que C est une variable uniforme sur $\{1, 2, \ldots, 11\}$.