. Chaîne de Markov : X_n chaîne de Markov sur E dénombrable

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=b \mid X_n=a) = Q(a,b) = \mathbb{P}(X_{n+1}=b \mid X_0=a_0, X_1=a_1, \dots X_{n-1}=a_{n-1}, X_n=a)$$

. Propriétés de Markov : G fonction mesurable bornée : $E^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}_x(G \circ \theta_n) = \mathbb{E}_{X_n}(G) \qquad \text{(faible)}$$

T temps d'arrêt, $\mathbb{E}_x(G \circ \theta_T \mathbb{1}_{(T<\infty)} \mid \mathcal{F}_T) = \mathbb{E}_{X_T}(G)\, \mathbb{1}_{(T<\infty)}$ (forte)

---

si E est infini (par exemple $E = \mathbb{Z}^d$), est-ce-que la chaîne de Markov revient à son point de départ, est-ce-qu'elle part à l'infini ?

<u>Théorème et définition</u> $x \in E$, on a une des deux situations suivantes :

(1) soit, en partant de x, on revient p.s en x

$$H_x = \inf\{n \geq 1, X_n = x\} \quad \text{temps d'arrêt}$$

$$\mathbb{P}_x(H_x < \infty) = 1$$

(2) soit, en partant de x, on ne revient pas en x avec probabilité >0

$$\mathbb{P}_x(H_x = \infty) > 0$$

Dans le cas (1), on dit que x est récurrent

(2) transitoire (transient)

$$N_x = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{(X_n = x)}$$

Dans le cas (1) $N_x = \infty$ p.s

(2) $N_x < \infty$ p.s

<u>dém</u> : On utilise la propriété de Markov forte avec le temps

t. d'arrêt H_x. Soit $k \in \mathbb{N}$ $\quad \mathbb{P}_x(N_x \geq k+1) = \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{(H_x<\infty)} \mathbb{1}_{(N_x \geq k)} \circ \theta_{H_x}\right]$

$$= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{(H_x<\infty)} \mathbb{E}_x\left(\mathbb{1}_{(N_x \geq k)}\right)\right]$$

$$= \mathbb{P}_x(H_x<\infty)\, \mathbb{P}_x(N_x \geq k)$$

$$\frac{\mathbb{P}_x(N_x \geq k+1)}{\mathbb{P}_x(N_x \geq k)} = \mathbb{P}_x(H_x<\infty)$$

Dans le cas (1), $\forall k$, $\mathbb{P}_x(N_x \geq k) = 1$

(2) $\quad \mathbb{P}_x(N_x \geq k) = \mathbb{P}_x(H_x<\infty)^k$

$\to N_x$ suit une loi géométrique

déf : noyau potentiel $U : E \times E \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

$$(x,y) \mapsto \mathbb{E}_x(N_y)$$

Prop : (i) $\forall x,y$, $\quad U(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x,y)$

(ii) x récurrent ssi $U(x,x) = \infty$

(iii) si $x \neq y$ $\quad U(x,y) = U(y,y)\, \mathbb{P}_x(H_y<\infty)$

dém : (i) $U(x,y) = \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{(X_n=y)}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_x(\mathbb{1}_{X_n=y}) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x,y)$

(ii) théorème précédent

(iii) $T = H_y$ temps d'arrêt. Propriété de Markov forte

$$\mathbb{E}_x(N_y) = \mathbb{E}_x\left(\mathbb{1}_{(H_y<\infty)} N_y \circ \theta_{H_y}\right) = \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{(H_y<\infty)} \mathbb{E}_y(N_y)\right]$$

$= \mathbb{P}(H_y < \infty)\, U(y,y)$

On appelle R l'ensemble des points récurrents.

<u>Lemme</u> : si $x \in R$, $y \in E$, si $U(x,y) > 0$ alors $y \in R$ et $\mathbb{P}_y(H_x < \infty) = 1$

<u>dem</u> : $\mathbb{P}_x(N_x < \infty) = 0 \geq \mathbb{P}_x(H_y < \infty, H_x \circ \theta_{H_y} = \infty)$

$$= \mathbb{E}_x\left(\mathbb{1}_{(H_y<\infty)}\, \mathbb{1}_{(H_x=\infty)} \circ \theta_{H_y}\right)$$

$$= \mathbb{E}_x\left(\mathbb{1}_{(H_y<\infty)}\, \mathbb{P}_y(H_x = \infty)\right)$$

$$= \mathbb{P}_x(H_y < \infty)\, \mathbb{P}_y(H_x = \infty)$$

si $U(x,y) > 0$, $\mathbb{P}_x(H_y < \infty) > 0$ donc $\mathbb{P}_y(H_x = \infty) = 0$

$\exists\, n_1, n_2,\quad \mathbb{P}_x(X_{n_1} = y) = Q_{n_1}(x,y) > 0$

$\mathbb{P}_y(X_{n_2} = x) = Q_{n_2}(y,x) > 0$

$p \geq 0 \qquad Q_{n_1+n_2+p}(y,y) \geq Q_{n_2}(y,x)\, Q_p(x,x)\, Q_{n_1}(x,y)$

$$\underbrace{\sum_{n\geq 0} Q_n(y,y)}_{=\infty} \geq \sum_{n \geq n_1+n_2} Q_n(y,y) = \sum_{p\geq 0} Q_{n_1+n_2+p}(y,y)$$

$$\geq \underbrace{Q_{n_2}(y,x)}_{>0}\, \underbrace{Q_{n_1}(x,y)}_{>0}\, \underbrace{\sum_{p\geq 0} Q_p(x,x)}_{=\infty}\ (x \text{ récurrent})$$

$\to y$ récurrent

<u>Th</u> Il existe une partition de R : $R = \bigcup_{i\in I} R_i$ tq

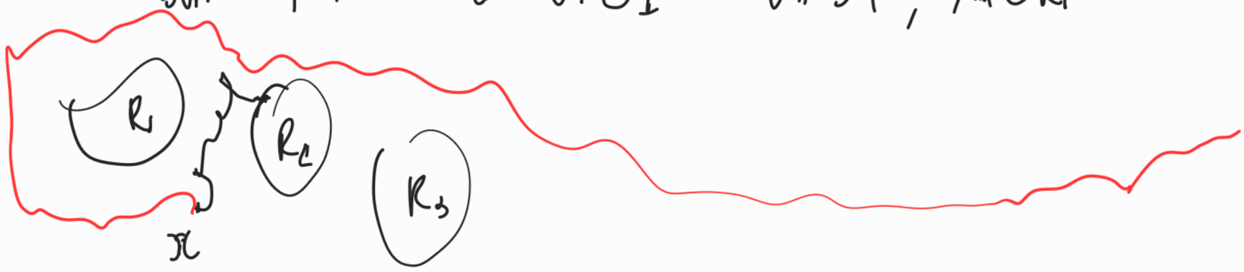
- si $x, y \in R_i$ alors $\mathbb{P}_x(H_y < \infty) = 1$

· si $x \in R_i$, $y \in R_j$, $i \neq j$, alors $\mathbb{P}_x(H_y = \infty) = 1$

· si $x \notin R$ et $T = \inf\{n, X_n \in R\}$ alors, $\mathbb{P}_x$-p.s.

soit $T = \infty$ et $\forall y \in E$ $N_y < \infty$ ("on part à l'infini")

soit $T < \infty$ et $\exists i \in I$ $\forall n \geq T$, $X_n \in R_i$



<u>dém</u> : on note $x \sim y$ si $U(x,y) > 0$ et $x, y \in R$

relation d'équivalence sur R :

· $U(x,x) = \infty$ $\quad x \sim x$

· prop précédente : si $U(x,y) > 0$ alors $U(y,x) > 0$

donc $x \sim y \Rightarrow y \sim x$

· $Q_m(x,y) > 0$ et $Q_n(y,z) > 0$ alors $Q_{m+n}(x,y) > 0$

→ si $x \sim y$ et $y \sim z$, alors $x \sim z$

→ partition de R en classes d'équivalences appelées R_i

si $x \in R_i$, $y \in R_i$ $\quad \mathbb{P}_x(H_y < \infty) = 1$

$y \in R_j$, $j \neq i$ $\quad U(x,y) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(H_y = \infty) = 1$

$x \notin R$ $\quad$ sur $\{T = \infty\}$ $\quad$ si $y \in R$ alors $N_y = 0$

$y \notin R$ on utilise la propriété forte de Markov en H_y → $N_y < \infty$ p.s.

sur $\{T < \infty\}$ soit i tel que $X_T \in R_i$. on utilise la propriété forte de Markov au temps T

<u>déf</u> : (X_n) est irréductible si $\forall x, y \in E$, $U(x,y) > 0$

Prop : (X_n) irréductible. Deux cas possibles

(1) Tous les états sont récurrents et il y a une seule classe de récurrence

(On dit que (X_n) est récurrente)

(2) Tous les états sont transitoires. On dit que (X_n) est transitoire

dém : . si R est non vide, alors $\forall y$, $U(x,y) > 0 \Rightarrow y$ récurrent et $x \sim y$
$x \in R$

$\rightarrow$ cas (1)

. sinon, $R = \emptyset$

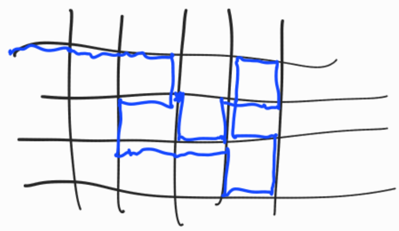
Exemple fondamental : marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$

$(e_1, e_2 .. e_d)$ base canonique de $\mathbb{R}^d$

$(X_1, X_2 .. X_n ..)$ iid $\quad \mathbb{P}(X_1 = e_i) = \mathbb{P}(X_1 = -e_i) = \frac{1}{2d}$

pour $1 \leq i \leq d$

$S_n = X_1 + X_2 .. + X_n$ Chaîne de Markov



Th (X_n) irréductible, si $d \leq 2$, (X_n) récurrente

$d \geq 3$ (X_n) transitoire

dém : . On veut montrer $\sum_{n \geq 0} Q_n^{(d)}(0,0) = \infty$ si $d \in \{1,2\}$

$< \infty$ si $d \geq 3$

$$Q_n^{(d)}(0,0) \leq Q_n^{(d+1)}(0,0)$$

. On veut montrer $\sum_{n \geq 0} Q_n^{(2)}(0,0) = \infty$

$\sum_{n \geq 0} Q_n^{(3)}(0,0) < \infty$

$\underline{d=2}$ $[\, Q_{2n+1}(0,0) = 0 \,]$

pour calculer $Q_{2n}(0,0)$, on regarde tous les chemins qui partent de $(0,0)$ et qui reviennent en $(0,0)$ après $2n$ pas. Chaque chemin a une probabilité $\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$

$$Q_{2n}(0,0) = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \sum_{m=0}^{n} \underbrace{\frac{2n!}{m!\,m!\,(n-m)!\,(n-m)!}} \qquad \frac{(n!)^2}{(n!)^2}$$

chemins ayant
- m pas positifs en x
- m pas négatifs en x
- $n-m$ pas positifs en y
- $n-m$ pas négatifs en y

$$Q_{2n}(0,0) = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \binom{2n}{n} \underbrace{\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m}\binom{n}{n-m}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \binom{2n}{n} \underbrace{\binom{2n}{n}}$$

$\binom{2n}{n}$: nb de sous ensembles A de $\{1, 2, \dots 2n\}$ à n élements.

$$A = \left(A \cap \{1,2 \dots n\}\right) \sqcup \left(A \cap \{n+1, \dots 2n\}\right)$$

si $m = |A \cap \{1,2 \dots n\}|$, alors $|A \cap \{n+1, \dots 2n\}| = n-m$

formule de Stirling $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \Rightarrow Q_{2n}(0,0) \sim \frac{1}{\pi n}$

$$\sum Q_{2n}(0,0) = \infty$$

$\underline{d=3}$: $$Q_{2n}(0,0) = \left(\frac{1}{6}\right)^{2n} \sum_{j,k} \frac{(2n)!}{\left(j!\,k!\,(n-j-k)!\right)^2} \qquad \frac{(n!)^2}{(n!)^2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \binom{2n}{n} \sum_{j,k} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} \Bigg(\underbrace{\frac{n!}{j!\,k!\,(n-j-k)!}}_{a_{j,k}} \Bigg)^2$$

$$a_{j,k} \geq 0 \qquad \sum a_{j,k} = 3^n$$

$$b_{j,k} = \frac{a_{j,k}}{3^n}, \qquad \sum b_{j,k} = 1$$

$$\sum b_{j,k}^2 \le \max b_{j,k}$$

$$Q_{2n}(0,0) \le \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \binom{2n}{n} \max_{j,k} \frac{1}{3^n} \frac{n!}{j!\,k!\,(n-k-j)!}$$

On veut maximiser $b_{j,k}$ $\longleftrightarrow$ minimiser $j!\,k!\,(n-k-j)!$

minimiser $p!\,q!\,r!$ sous la contrainte $p+q+r=n$

$\rightarrow p=q=r=\frac{n}{3}$

pour de tels j,k, Stirling $\rightarrow b_{j,k} \sim \frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(\left(\frac{3e}{n}\right)^{\frac{n}{3}} \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{n}{3}}}\right)^3$

$$\sim \frac{c}{n}$$

$$Q_n(0,0) \le \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \binom{2n}{n} \frac{c}{n} \le \frac{c'}{n^{3/2}}$$

$$\sum Q_n(0,0) < \infty$$

Remarque $(X_1, X_2 \dots X_n \dots)$ iid $\quad \mathbb{P}(X_1=1)=p>\frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(X_1=-1)=1-p<\frac{1}{2}$

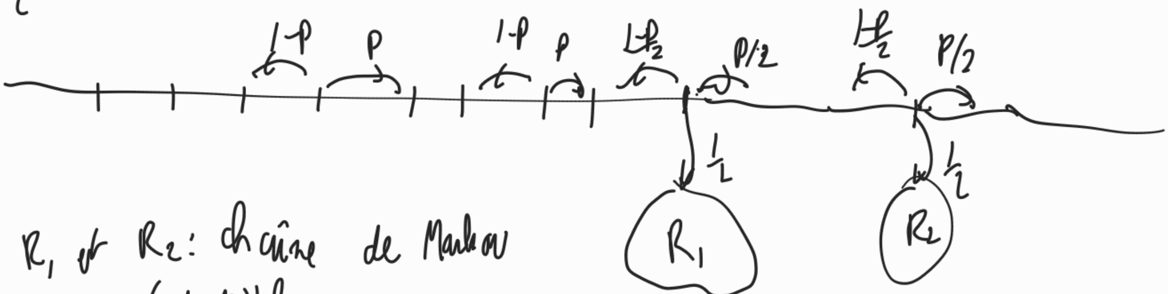
$S_n = X_1 + \dots X_n$

$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[L^1]{p.s.} \frac{2p-1}{2} > 0$ (loi des grands nombres)

p.s., $\exists N$, $\forall n \geq N$, $\frac{S_n}{n} > 0 \Rightarrow S_n > 0$

donc $N_0 < \infty$ p.s. donc (S_n) transitoire

$p > \frac{1}{2}$



sur R_1 et R_2 : chaîne de Markov récurrente irréductible