Si (X_n) récurrente positive, $\forall x \in E$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_k = x\}} \xrightarrow{p.s} \mu(x)$$

mesure empirique : $\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{X_k} \xrightarrow{(d)} \mu$

sans des hypothèses additionnelles, $\mathbb{P}(X_n = x) \to \mu(x)$

<u>Th</u> (ergodique) si (X_n) est récurrente positive et irréductible, et si f est une fonction relle que $\int |f| \, d\mu < \infty$, alors $\forall \nu$ mesure de proba sur E, $\mathbb{P}_\nu$-p.s

$$\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)}_{\text{moyenne temporelle}} \to \underbrace{\int f(d\mu)}_{\text{moyenne spatiale}}$$

remarque : il existe des théorèmes ergodiques dans d'autres contextes (systèmes dynamiques

<u>dém</u> : on va démontrer que si f et $g \geq 0$ vérifiant $\int f d\mu < \infty$
$\int g \, d\mu < \infty$

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)}{\sum_{k=0}^{n-1} g(X_k)} \longrightarrow \frac{\int f d\mu}{\int g \, d\mu}$$

On se ramène à $\mu = \delta_x$

excursion en dehors de x : morceau de trajectoire partant de x jusqu'au temps de retour en x

excursions indépendantes (propriété de Markov forte)

$T_0 = 0$, $T_1 = H_x = \inf\{n \geq 1, X_n = x\}$, $T_{n+1} = \inf\{k \geq T_n + 1, X_k = x\}$

p.s, $\forall n$, $T_n < \infty$

$$Z_k(f) = \sum_{n=T_k+1}^{T_{k+1}} f(X_n)$$

- Les variables $Z_k(f)$ sont iid de moyenne $\int f d\mu / \mu(x)$

en effet, si (g_i) fonctions mesurables bornées ≥ 0, on montre par récurrence que $\forall k$

$$\mathbb{E}_x\left[\prod_{i=0}^{k} g_i Z_i(f)\right] = \prod_{i=0}^{k} \mathbb{E}_x\left(g_i Z_0(f)\right)$$

vrai si $k=0$

si c'est vrai pour $k-1$, $Z_k(f) = Z_0(f) \circ \theta_{T_k}$

En utilisant la propriété de Markov forte au temps T_k

$$\mathbb{E}_x\left[\prod_{i=0}^{k} g_i Z_i(f)\right] = \mathbb{E}_x\left(\prod_{i=0}^{k-1} g_i Z_i(f)\, g_k Z_0(f) \circ \theta_{T_k}\right)$$

$$= \mathbb{E}_x\left(\prod_{i=0}^{k-1} g_i Z_i(f)\right) \mathbb{E}_x(g_k Z_0(f))$$

$$= \left[\prod_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}_x\left(g_i Z_0(f)\right)\right] \mathbb{E}_x(g_k Z_0(f))$$

$$\mathbb{E}_x(Z_0(f)) = \mathbb{E}_x\left(\sum_{k=0}^{H_x-1} \sum_{y\in E} f(y) 1_{(y\in E)}\right) = \sum_{y\in E} f(y) \underbrace{\mathbb{E}_x\left(\sum_{k=0}^{H_x-1} f(y)\right)}_{\nu_x(y)}$$

$$= \frac{\int f(d\mu)}{\mu(x)}$$

$(\nu_x(x) = 1)$

Loi des grands nombres : $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Z_k(f) \to \frac{\int f \, d\mu}{\mu(x)}$

f

$$\sum_{i=0}^{N_{n,i}-1} f(X_i)$$

$$N_x(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{(X_k = x)} \rightarrow T_{N_x(n)} \leq n \leq T_{N_x(n)+1}$$

$$\left(\frac{\sum_{k=0}^{T_{N_x(n)}} f(X_k)}{N_x(n)} \leq \frac{\sum_{k=0}^{n} f(X_k)}{N_x(n)} \leq \frac{\sum_{k=0}^{T_{N_x(n)+1}} f(X_k)}{N_x(n)} \right)$$

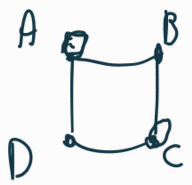
$$\sum_{j=0}^{N_x(n)-1} Z_j(f) \qquad\qquad \sum_{j=0}^{N_x(n)} Z_j(f)$$

D'après la loi des grands nombres, les deux bornes convergent vers

$$\frac{\int f(d\mu)}{\mu(x)}$$

$$\rightarrow \frac{\sum_{k=0}^{n} f(X_k)}{N_x(n)} \xrightarrow{p.s} \frac{\int f(d\mu)}{\mu(x)}$$

de même,
$$\frac{\sum_{k=0}^{n} g(X_k)}{N_x(n)} \xrightarrow{p.s} \frac{\int g\, d\mu}{\mu(x)}$$



marche aléatoire partant de A

$$X_{2n} \in \{A, C\} \qquad X_{2n+1} \in \{B, D\}$$

$\mathbb{P}(X_n = A)$ ne peut pas converger

déf : si x récurrent, $L_x = \{n \geq 0,\ Q_n(x,x) > 0\}$ temps de retour possibles

période de x = PGCD(L_x)

Prop : . si (X_n) est récurrente irréductible, tous les états ont la même période

. on dit que la chaîne est apériodique si la période est 1. Dans ce cas, $\forall x, y \in E$, $\exists N(x,y)$, $\forall n \geq N(x,y)$, $Q_n(x,y) > 0$

dém : . $x, y \in E$, $\exists n_1, n_2$ $Q_{n_1}(x,y) > 1$ $Q_{n_2}(y,x) > 1$

si $n \in L_x$, alors $n_1 + n + n_2 \in L_y$ $\rightarrow L_x - L_x \subset L_y - L_y$

$\rightarrow$ période de x divise la période de y.
y x

. si la chaîne est apériodique, $\exists n$, $Q_n(x,x) > 0$ et $Q_{n+1}(x,x) > 0$

si $n = 1$, $\forall m \geq 1$, $Q_m(x,x) > 0$

si $n > 1$, $0 \leq j \leq n-1$

$$Q_{n^2+j}(x,x) = Q_{j(n+1)+n(n-j)}(x,x) > 0$$

$\rightarrow \forall m \geq n^2$, $Q_m(x,x) > 0$

. si $Q_k(x,y) > 0$, $\forall m \geq n^2 + k$, $Q_m(x,y) > 0$

remarque : si (X_n) est périodique, chaîne paresseuse ("lazy random walk" en anglais) (Y_n) telle que $\mathbb{P}_x(Y_1 = x) = \frac{1}{2}[1 + \mathbb{P}_x(X_1 = x)]$

$\forall x, y$ $\mathbb{P}_x(Y_1 = y) = \frac{1}{2}\mathbb{P}_x(X_1 = y)$ si $y \neq x$

Y_n est apériodique $\forall x$ $\mathbb{P}_x(Y_1 = x) > 0$

toute mesure invariante pour (X_n) l'est pour (Y_n)

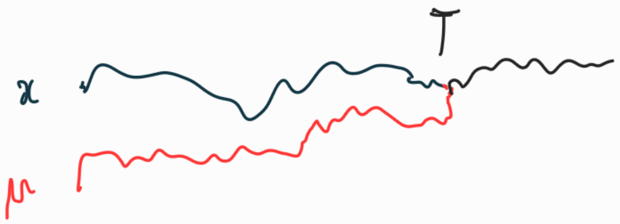
Th si (X_n) est récurrente positive, irréductible, apériodique, alors $\forall x, \forall y$

$$\mathbb{P}_x(X_n=y) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(y)$$

<u>remarque</u> : pour faire des simulations aléatoires suivant une certaine loi de probabilité μ, une possibilité est de trouver une chaîne de Markov récurrente positive, irréductible, apériodique dont μ soit la probabilité invariante. $\forall x$, $\mathbb{P}_x(X_n=y) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(y)$

X_n est proche de la loi μ. [chaîne de Monte Carlo]

<u>dém</u> idée : couplage



On définit une chaîne sur $E\times E$: $\tilde{Q}((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = Q(x_1,y_1)Q(x_2,y_2)$

la chaîne est irréductible : si (x_1,x_2) et $(y_1,y_2) \in E\times E$, $\exists n_1$, $\forall n \geq n_1$, $Q_n(x_1,y_1)>0$

$\exists n_2$, $\forall n \geq n_2$, $Q_n(y_1,y_2) > 0$ si $n > \sup(n_1,n_2)$, $\tilde{Q}_n((x_1,x_2),(y_1,y_2)) > 0$

$\mu\otimes\mu$ est invariante

$$\sum_{(x_1,x_2)\in E\times E} \mu(x_1)\mu(x_2)\tilde{Q}((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \sum \mu(x_1)\mu(x_2)Q(x_1,y_1)Q(x_2,y_2)$$

$$= \sum \mu(x_1)Q(x_1,y_1)\sum \mu(x_2)Q(x_2,y_2)$$

$$= \mu(y_1)\mu(y_2)$$

$\to$ la chaîne sur $E\times E$ récurrente positive. On note cette chaîne $(X_n^{(1)}, X_n^{(2)})$

$$\mathbb{P}_x(X_n=y) - \mu(y) = \bar{\mathbb{P}}_{\mu\otimes\delta_x}(X_n^{(2)}=y) - \bar{\mathbb{P}}_{\mu\otimes\delta_x}(X_n^{(1)}=y)$$

$$= \bar{\mathbb{E}}_{\mu\otimes\delta_x}\left(\mathbb{1}_{(X_n^{(2)}=y)} - \mathbb{1}_{(X_n^{(1)}=y)}\right)$$

Soit $T = \inf\{n,\ X_n^{(1)} = X_n^{(2)}\}$; $\underbrace{\mathbb{P}_x(X_n = y) - \mu(y)}_{\to 0} = \underbrace{\bar{\mathbb{E}}_{\mu\otimes\delta_x}\left(\mathbb{1}_{(X_n^{(2)}=y)} - \mathbb{1}_{(X_n^{(1)}=y)}\right)\mathbb{1}_{T>n}}_{I}$

$+ \underbrace{\bar{\mathbb{E}}\left(\cdots \mathbb{1}_{T\leq n}\right)}_{II}$

Comme T est fini p.s, $I \to 0$

$$II = \sum_{k=0}^{n} \sum_{z\in E} \bar{\mathbb{E}}_{\mu\otimes\delta_x} \underbrace{\left(\mathbb{1}_{(T=k,\ X_k^{(1)}=z=X_k^{(2)})}\mathbb{1}_{(X_n^{(2)}=y)} - \mathbb{1}_{(X_n^{(1)}=y)}\right)}_{0}$$

On utilise la propriété de Markov au temps k

$$\bar{\mathbb{E}}_{\mu\otimes\delta_x}\left(\mathbb{1}_{T=k,\ X_k^{(1)}=X_k^{(2)}=z}\ \mathbb{1}_{X_n^{(2)}=y}\right)$$

$$= \mathbb{E}_z(X_{n-k} = y)$$

$$\bar{\mathbb{E}}_{\mu\otimes\delta_x}\left(\mathbb{1}_{(T=k,\ X_k^{(1)}=X_k^{(2)}=z)}\ \mathbb{1}_{X_n^{(1)}=y}\right) = \mathbb{E}_z(X_{n-k}=y)$$

Retour sur les fonctions harmoniques

. Hewitt Savage si C est un cône de $\mathbb{R}^d$ ($d\geq 3$) et (X_n) la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$ $\quad \mathbb{P}(X_1 = e_i) = \mathbb{P}(X_1 = -e_i) = \frac{1}{2d} \quad i\in\{1,\dots d\}$

alors

$$\mathbb{P}(\exists n,\ \forall m\geq n,\ X_m \in C) \in \{0,1\}$$

$$\mathbb{P}(\forall n,\ \exists m\geq n,\ X_m \notin C) \in \{0,1\}$$

Si $\quad \bar{C} \neq \mathbb{R}^d \qquad (*) \quad \mathbb{P}(\forall n,\ \exists m\geq n,\ X_m\notin C) = 1$

résultat vrai . preuve : invariance du mouvement brownien par rotation marche aléatoire : invariante par les symétries de $\mathbb{Z}^d$

$$e_i \longmapsto \pm e_{\sigma(i)} \qquad \sigma \text{ permutation}$$

nb de symétries $2^d d!$

→ cônes qui sont des chambres de Weil :

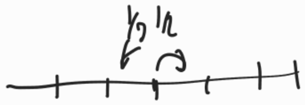
$C = \{0 \le x_1 \le x_2 \cdots \le x_d\}$ et toute image de C par une symétrie de $\mathbb{Z}^d$

si $\bar{C}$ est une réunion de chambres de Weil, $(*)$ est vraie

def : fonction harmonique associée à (X_n) chaîne de Markov sur E : $f : E \to E$

$$\forall x, \quad f(x) = \sum_{y \in E} Q(x,y) f(y)$$

lien avec les fonctions harmonique de l'analyse



(X_n) marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$

$$\forall n \quad f(n) = \frac{1}{2} f(n+1) + \frac{1}{2} f(n-1) \quad (*)$$

informellement : $f(n+1) \sim f(n) + f'(n) + \frac{1}{2} f''(n)$

$f(n-1) \sim f(n) - f'(n) \pm \frac{1}{2} f''(n)$

$* : \ f(n) = f(n) + \frac{1}{2} f''(n) \iff f''(n) = 0$

plus généralement, sur $\mathbb{Z}^d$, marche aléatoire simple, les fonctions harmoniques sont les fonctions vérifiant $\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0 = \Delta f$

- f est harmonique pour (X_n) si et seulement si $f(X_n)$ est une martingale

E finie
où $E = E' \sqcup E''$ et g est une fonction $E'' \to \mathbb{R}$

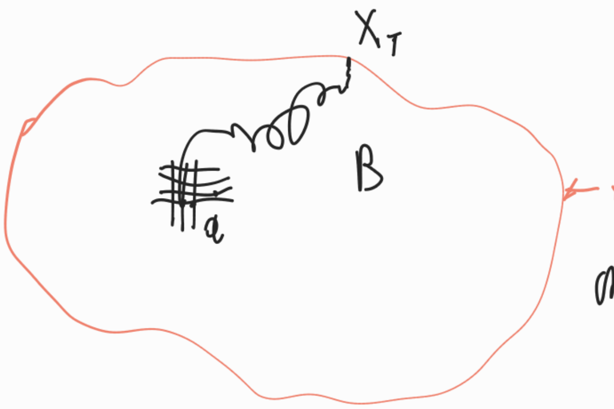
$T = \inf\{n, X_n \in E''\}$

la fonction f définie $f(x) = \mathbb{E}_x[g(X_T)]$ est harmonique

sur E' : $\forall x \in E'$, $f(x) = \sum_{y \in E} Q(x,y) f(y)$

E'' : frontière

→ manière d'approximer une fonction f harmonique (au sens $\Delta f = 0$)
avec conditions au bord



g définie sur A

on cherche f telle que
$\Delta f = 0$ dans B
$f = g$ sur A