Corrigé de l'examen de probabilités

USTC, 2023, cours de P. Marchal

1) En appliquant la formule, on obtient $S_o = 0$, $S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = -1$, $S_4 = 0$, $S_5 = 1$, $S_6 = 2$.

2) Si $Y = 1$, $S_n = n$ pour tout n et si $Y = -1$, $S_n = -n$ pour tout n. Donc (S_n) est une chaine de Markov de matrice de transition $Q(n, n+1) = 1$ si $n > 0$, $Q(n, n-1) = 1$ si $n < 0$, $Q(0, 1) = q$ et $Q(0, -1) = 1 - q$. La chaine passe un temps fini en chaque point p.s. donc elle est transitoire, aucun état n'est récurrent.

3) (S_n) est la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, de matrice de transition $Q(n, n+1) = Q(n, n-1) = 1/2$ pour tout n. Tous les états sont récurrents.

4) Le théorème central limite assure que $S_n/\sqrt{n}$ converge en loi vers une gaussienne standard X. Attention, la convergence en loi ne permet pas de conclure que $E(|S_n|/\sqrt{n}) \to E(|X|)$ car la fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas continue bornée.

En revanche, pour tout m, la fonction $x \mapsto |x| f_m(x)$ est continue bornée, avec f_m la fonction paire telle que $f_m(x) = 1$ si $x \in [-m, m]$, $f_m(x) = 1 - (x - m)/m$ si $x =\in [m, m + (1/m)$, $f_m(x) = 0$ si $x > m + (1/m)$. Le théorème central limite assure que pour tout m, quand n tend vers l'infini, $E(f_m(|S_n|/\sqrt{n})) \to E(f_m(|X|))$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $m > 0$, il existe $N(m)$ tel que si $n > N(m)$,

$$E[f_m(S_n/\sqrt{n})] \geq E[f_m(X)] - \varepsilon \tag{1}$$

Par ailleurs comme $f_m(x)$ converge en croissant vers $|x|$, par convergence monotone, $E[f_m(X)]$ converge vers $E|X|$. Il existe donc m_0 tel que $E[f_{m_0}(X)] \geq 2E|X|/3$. En appliquant (1) avec $m = m_0$ et $\varepsilon = E|X|/3$, on obtient que pour $n > N(m_0)$,

$$E[f_{m_0}(S_n/\sqrt{n})] \geq E|X|/3$$

Par monotonie des f_m, pour $m \geq m_0$, on a toujours, si $n > N(m_0)$,

$$E[f_m(S_n/\sqrt{n})] \geq E|X|/3$$

En faisant tendre m vers l'infini, pour tout $n > N(m_0)$,

$$E[|S_n|/\sqrt{n}] \geq E|X|/3 > 0$$

5)

$$\begin{aligned} P(S_3 = 1 | S_0 = 0, S_1 = 1, S_2 = 0) &= P(T_3 = 0, X_3 = 1 | S_0 = 0, S_1 = 1, S_2 = 0) \\ &\quad + P(T_3 = 1, X_3 = -1 | S_0 = 0, S_1 = 1, S_2 = 0) \\ &= (p/2) + (1 - p)/2 = 1/2 \end{aligned}$$

$$P(S_1 = 1|S_0 = 0) = P(Y = 1) = q \neq 1/2$$

Si (S_n) était une chaine de Markov, on aurait

$$P(S_3 = 1|S_0 = 0, S_1 = 1, S_2 = 0) = P(S_1 = 1|S_0 = 0) = Q(0, 1)$$

mais $P(S_3 = 1|S_0 = 0, S_1 = 1, S_2 = 0) \neq P(S_1 = 1|S_0 = 0)$ donc (S_n) n'est pas une chaine de Markov.

6)

$$\begin{aligned}
&P(S_4 = 2|S_0 = 0, S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 2) \\
&= P(T_4 = 0, X_4 = 1) + P(T_4 = 1, X_4 = -1) + P(T_4 = 2, X_4 = 1) \\
&= (p/3) + (1 - p)/3 + (p/3) = (1 + p)/3
\end{aligned}$$

$$P(S_2 = 2|S_0 = 0, S_1 = 1) = P(X_1 = 1) = p$$

Si $p \neq 1/2$,

$$P(S_4 = 2|S_0 = 0, S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 2) \neq P(S_2 = 2|S_0 = 0, S_1 = 1)$$

et par le même raisonnement qu'en 5), (S_n) n'est pas une chaine de Markov.

7) Comme T_{n+1} est indépendante de Y et des $X_i, T_i, i \leq n$, T_{n+1} est indépendante de F_n. Donc

$$\begin{aligned}
E(S_{T_{n+1}+1} - S_{T_{n+1}})|F_n] &= \sum_{i=0}^{n-1} E[(S_{i+1} - S_i)\mathbf{1}_{T_{n+1}=i}|F_n] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} E[(S_{i+1} - S_i)|F_n]E[\mathbf{1}_{T_{n+1}=i}] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} E[(S_{i+1} - S_1)|F_n] \\
&= \frac{1}{n}S_n
\end{aligned}$$

8) S_n est mesurable par rapport à F_n, donc

$$\begin{aligned}
E[S_{n+1}|F_n] &= E[S_n + X_{n+1}(S_{T_{n+1}+1} - S_{T_{n+1}})|F_n] \\
&= S_n + E[X_{n+1}(S_{T_{n+1}+1} - S_{T_{n+1}})|F_n]
\end{aligned}$$

Or X_{n+1} est indépendante de F_n (même argument que pour T_{n+1}), donc

$$E[S_{n+1}|F_n] = S_n + E[X_{n+1}]E[(S_{T_{n+1}+1} - S_{T_{n+1}})|F_n]$$

Or $E[X_{n+1}] = 2p - 1$ et en utilisant 7), on a bien $E[S_{n+1}|F_n] = c_nS_n$ avec

$$c_n = \frac{n + 2p - 1}{n}$$

9)

$$\log C_n = \sum_{k=1}^{n} \log(1 + (2p-1)/k)$$

On utilise le développement limité

$$\log(1 + (2p-1)/k) = (2p-1)/k - (2p-1)^2/2k^2 + O(1/k^3)$$

et l'estimation classique

$$\sum_{k=1}^{n} 1/k = \log n + \gamma + o(1)$$

(γ constante d'Euler) pour déduire que la suite ($\log C_n - (2p-1)\log n$) est convergente. Si on note c_p sa limite, on a $C_n \sim k_p n^{2p-1}$ avec $k_p = \exp(c_p)$.
10) En utilisant 8) et 9), on voit que (M_n) est une martingale pour la filtration (F_n).
11) En utilisant le fait que $|S_{n+1} - S_n| = 1$, que S_n est mesurable par rapport à F_n et le calcul fait en 8), on obtient

$$\begin{aligned} E[S_{n+1}^2|F_n] &= E[S_n^2 + 2S_n(S_{n+1} - S_n) + (S_{n+1} - S_n)^2|F_n] \\ &= 1 + S_n^2 + 2S_n E[(S_{n+1} - S_n)|F_n] \\ &= 1 + S_n^2 + 2S_n \times (2p-1)S_n/n \\ &= 1 + (2c_n - 1)S_n^2 \end{aligned}$$

Or

$$E[(M_{n+1} - M_n)^2|F_n] = \frac{1}{C_n^2}\left(E[S_{n+1}^2|F_n] - c_n^2 S_n^2\right)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} E[(M_{n+1} - M_n)^2|F_n] &= \frac{1}{C_n^2}\left(1 + (2c_n - 1)S_n^2 - c_n^2 S_n^2\right) \\ &= \frac{1}{C_n^2}\left(1 - (c_n - 1)^2 S_n^2\right) \\ &= \frac{1}{C_n^2}\left(1 - (2p-1)^2\left(\frac{S_n}{n}\right)^2\right) \end{aligned}$$

12) Si $p > 3/4$, comme $C_n \sim k_p n^{2p-1}$, on a $1/C_n^2 \sim k_p^{-2}/n^{4p-2}$ avec $4p - 2 > 1$. L'estimation en 12) implique donc que

$$\sum_n E[(M_{n+1} - M_n)^2] = \sum_n E[E[(M_{n+1} - M_n)^2|F_n]] \leq \sum_n \frac{1}{C_n^2} < \infty$$

Ainsi M_n est bornée dans L^2 et converge donc dans L^2 vers une variable M_∞. Comme la convergence est dans L^2, par orthogonalité des accroissements de martingale,

$$E(M_\infty^2) = \lim_n E(M_n^2) = \lim_n \sum_{k=1}^{n-1} E[(M_{k+1} - M_k)^2] = \sum_{k=1}^{\infty} E[(M_{k+1} - M_k)^2]$$

On en déduit $0 < E(M_\infty^2) < \infty$ et ainsi M_∞ n'est pas presque sûrement nulle.

Ce sujet est tiré de l'article “A martingale approach for the elephant random walk “
https://arxiv.org/abs/1707.04130