**École Normale Supérieure de Lyon** **Année 2015-2016**

---

Master de Mathématiques Avancées - Probabilités — Processus de Markov et Calcul Stochastique

# Devoir 1 : Mouvement brownien et martingales

---

Dans tous les exercices, les variables aléatoires considerées sont définies sauf mention contraire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

**Exercice 1.** *Loi du logarithme itéré et Hölder-continuité du mouvement brownien.* Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel issu de 0. On pose pour tout $t \geq 0$, $S_t := \sup_{0\leq s\leq t} B_s$ et pour tout $t \geq e$, $h(t) := \sqrt{2t \log\log t}$.

**1.** Montrer que pour tout $t > 0$,

$$P(S_t > u\sqrt{t}) \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{2e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}u}.$$

**2.** Soient $r, c \in \mathbb{R}$ tels que $1 < r < c^2$. En étudiant les quantités $P(S_{r^n} > ch(r^{n-1}))$ pour $n \geq 1$, montrer que presque sûrement

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t}} \leq 1.$$

**3.** Montrer que presque sûrement, il existe une infinité de valeurs $n \geq 1$ telles que

$$B_{r^n} - B_{r^{n-1}} \geq \sqrt{\frac{r-1}{r}}h(r^n).$$

En déduire la loi du logarithme itéré :

$$\text{p.s.,} \ \limsup_{t\to+\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t}} = 1 \ \text{et} \ \liminf_{t\to+\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t}} = -1.$$

**4.** Soit $t \geq 0$ fixé. Montrer que presque sûrement

$$\limsup_{s\downarrow 0} \frac{B_{t+s} - B_t}{\sqrt{2s\log\log(1/s)}} = 1 \ \text{et} \ \liminf_{s\downarrow 0} \frac{B_{t+s} - B_t}{\sqrt{2s\log\log(1/s)}} = -1.$$

En déduire que presque sûrement, les trajectoires du mouvement brownien ne sont 1/2-Hölderiennes sur aucun intervalle.

**Exercice 2.** *Loi de l'Arcsinus.* Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel issu de 0. On pose pour tout $t \geq 0$, $S_t := \sup_{0\leq s\leq t} B_s$ et on définit le premier temps d'atteinte de $S_1$ par

$$T := \inf\{t \geq 0 \mid B_t = S_1\}.$$

**1.** Montrer que $T < 1$ p.s., puis que $T$ n'est pas un temps d'arrêt.

**2.** Montrer que les variables aléatoires $S_t, |B_t|$ et $S_t - B_t$ ont même loi.

**3.** Montrer que la loi de $T$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue donnée par

$$g(t) := \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}\mathbf{1}_{(0,1)}(t).$$

Cette loi est appelée loi de l'Arcsinus.

**4.** Montrer que les résultats précédents s'appliquent au dernier zéro du mouvement brownien sur $[0, 1]$ :

$$L := \sup\{t \in [0, 1] \mid B_t = 0\}.$$

**Exercice 3.** *Lemme de Wald.* Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel issu de 0, et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration canonique. Soit $T$ un temps d'arrêt relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, que l'on suppose intégrable. On pose $T_0 := 0$, et pour tout $n \geq 1$,

$$T_n := T_{n-1} + \tau_n,$$

où on définit $\tau_n$ comme l'équivalent du temps d'arrêt $T$ pour le processus $(B_t^{(n)})_{t\geq 0}$, défini pour tout $t \geq 0$ par

$$B_t^{(n)} := B_{T_{n-1}+t} - B_{T_{n-1}}.$$

**1.** Pour tout $n \geq 1$, définir rigoureusement la variable aléatoire $\tau_n$, puis vérifier que $(T_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de temps d'arrêt.

**2.** Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{B_{T_n}}{n} = 0 \quad \text{p.s.}$$

**3.** Montrer que la variable aléatoire $B_T$ est intégrable.

**4.** Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{B_{T_n}}{n} = E(B_T) \quad \text{p.s.}$$

En déduire le Lemme de Wald : si $T$ est un temps d'arrêt relativement à la filtration canonique du mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ et si $T$ est intégrable, alors $E(B_T) = 0$.

**Exercice 4.** *Martingales et supremum du mouvement brownien.* On munit l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ d'une filtration complète $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty]}$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale (relativement à $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty]}$) à trajectoires continues. On suppose que presque sûrement $M_0 = x$, $M_t \geq 0$ pour tout $t \geq 0$ et que

$$M_t \xrightarrow[t\to+\infty]{p.s.} 0.$$

**1.** Montrer que pour tout $y > x$,

$$P\left(\sup_{t\geq 0} M_t \geq y\right) = \frac{x}{y}.$$

**2.** Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty]}$-mouvement brownien réel issu de $x \in \mathbb{R}_+$, et $T_0 := \inf\{t \geq 0 \mid B_t = 0\}$. Déterminer la loi de

$$\sup_{t\leq T_0} B_t.$$

**3.** Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty]}$-mouvement brownien réel issu de 0, et $\mu > 0$. Déterminer la loi de

$$\sup_{t\geq 0} (B_t - \mu t).$$