École Normale Supérieure de Lyon **Année 2015-2016**

Master de Mathématiques Avancées - Probabilités Processus de Markov et Calcul Stochastique

Partiel

Exercice 1. Montrer que pour tout $\alpha < 1/2$, le mouvement brownien est localement α-höldérien. Indication: on pourra considérer des événements de la forme

$$\forall k \in \{0, \ldots, 2^n - 1\} \ : \ \left| B\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - B\left(\frac{k}{2^n}\right) \right| \leqslant 2^{-n\alpha}.$$

Exercice 2. Soit B un mouvement brownien et X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ et $\mathbb{E}[X] = 0$. Let but est de montrer qu'il existe un temps d'arrêt T (par rapport à la filtration naturelle du brownien) tel que B_T a même loi que X et $\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[X^2]$.

1. Montrer que le résultat est vrai si X prend seulement deux valeurs.

On définit les suites $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de manière récursive de la façon suivante. Supposons $(X_k)_{k<n}$ et $(\xi_k)_{k<n}$ construits. On pose

$$\mathcal{G}_n = \sigma(\xi_k, k < n), \qquad X_n = \mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{G}_n], \qquad \xi_n = \left| \begin{array}{rl} 1 & \text{si } X \geqslant X_n, \\ -1 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

2. Montrer que (X_n) est une martingale qui converge presque sûrement et dans L^2 vers X.

3. En déduire le résultat.

Exercice 3. Soit $(E_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ (c'est-à-dire $\mathbb{P}[E_n \geqslant x] = e^{-\lambda x}$, $x \geqslant 0$). On définit N un processus de Poisson de paramètre λ par

$$N(t) = \sup\{k \geqslant 0 : \sum_{j=1}^{k} E_k \leqslant t\} \qquad (t \geqslant 0).$$

1. Soit $\mathcal{F}_t = \sigma(N(s), s \leqslant t)$, et soit T un temps d'arrêt. Montrer que conditionellement à $T < \infty$, le processus $(N(t+T) - N(t))_{t\geqslant 0}$ est indépendant de $\mathcal{F}_T$ et a la loi d'un processus de Poisson de paramètre λ.

Soit S un ensemble fini, et soit $(N_{x,y})_{x,y\in S, x\neq y}$ une famille de processus de Poisson indépendants. On construit un processus X partant de $x \in S$ par récurrence de la façon suivante. Soient $J_0 = 0$ et $X(0) = x$. Supposant $(J_k)_{k\leqslant n}$ et $(X(t))_{t\leqslant J_n}$ construits, on pose

$$J_{n+1} = \inf\{t \geqslant J_n : \exists y \text{ t.q. } N_{X(J_n),y}(t) \neq N_{X(J_n),y}(J_n)\}.$$

Alors il existe exactement un $y \in S$ tel que $N_{X(J_n),y}(J_{n+1}) \neq N_{X(J_n),y}(J_n)$; on définit $X(J_{n+1})$ comme étant cet unique y, et on pose $X(t) = X(J_n)$ pour $t \in [J_n, J_{n+1}[$.

2. Montrer que X est un processus de Markov (préciser dans quel sens), et identifier sa matrice de transition.