École Normale Supérieure de Lyon **Année 2014-2015**

Master de Mathématiques Avancées - Probabilités — Processus de Markov et Calcul Stochastique

Partiel

Toutes les réponses doivent bien sûr être justifiées avec rigueur et précision.

Exercice 1. Soient (B_t) un mouvement brownien standard, $S_t = \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} B_s$, Z l'ensemble des zéros de B sur $[0,1]$, et pour $\delta \in (0,1)$, soit $Z_\delta = Z \cap (\delta, 1-\delta)$.

1. Soient $a \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$, A l'événement $\{|B_{a+\varepsilon}| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\}$, et $T = \inf\{t \geqslant a : \; B_t = 0\}$. Montrer que

$$\mathbb{P}_0[A] \geqslant \mathbb{P}_0[T \leqslant a+\varepsilon] \inf_{0 \leqslant t \leqslant \varepsilon} \mathbb{P}_0[|B_t| \leqslant \sqrt{\varepsilon}].$$

2. En déduire qu'il existe C tel que $\mathbb{P}_0[T \leqslant a+\varepsilon] \leqslant C\sqrt{\frac{\varepsilon}{a+\varepsilon}}$.

3. Soit K_n le nombre d'intervalles parmi $\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right)_{0 \leqslant k < 2^n}$ (k entier) qui intersectent Z_δ. Montrer que presque sûrement, $\liminf 2^{-n/2} K_n < \infty$.

4. On admet que Z a même loi que l'ensemble $Y = \{t \in [0,1] : \; B_t = S_t\}$, et que pour tout $\alpha < 1/2$, le mouvement brownien est α-hölderien. Montrer que pour tout $\alpha < 1/2$, on a $\limsup 2^{-\alpha n} K_n = +\infty$.

Exercice 2. On pose

$$P_t f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(e^{-t}x + z\sqrt{1-e^{-2t}})\, e^{-z^2/2}\, \mathrm{d}z \qquad (x \in \mathbb{R}, t \geqslant 0).$$

1. Montrer que (P_t) est un semi-groupe de Feller.

2. Soit $\mathcal{L}$ le générateur infinitésimal de (P_t). Trouver un sous-espace $\mathcal{D}$ dense dans l'ensemble des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini et contenu dans le domaine de $\mathcal{L}$. Calculer $\mathcal{L}f$ pour $f \in \mathcal{D}$.

3. On admet qu'il existe un processus de Feller (X_t) associé à (P_t). Montrer que quel que soit le point de départ, X_t converge en loi vers une gaussienne standard quand $t \to \infty$.

Exercice 3. On note $\mathcal{C}_0^\infty$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ qui tendent vers 0 à l'infini. Soit $B = (B^{(1)}, B^{(2)}, B^{(3)})$ un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$, qui part de $x = (x_1, x_2, x_3)$ sous la loi $\mathbb{P}_x$ (i.e. sous $\mathbb{P}_x$, les processus $B^{(1)}, B^{(2)}, B^{(3)}$ sont des browniens indépendants, issus de x_1, x_2, x_3 respectivement). On rappelle que $\frac{1}{2}\Delta$ est le générateur infinitésimal de B, dont le domaine contient $\mathcal{C}_0^\infty$. Soit $f(x) = |x|^{-1}$ ($|\cdot|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^3$). On admet que $\Delta f = 0$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Pour tout $a > 0$, on définit

$$T_a = \inf\{t \geqslant 0 : |B_t| = a\}.$$

1. Soit $F_a = \{x : |x| \geqslant a\}$. On admet que $(B_{t \wedge T_a})_{t \geqslant 0}$ définit un processus de Feller sur F_a; on note $\mathcal{L}_a$ son générateur infinitésimal. Soit $g \in \mathcal{C}_0^\infty$, et $h = g_{|F_a}$. Montrer que h est dans le domaine de $\mathcal{L}_a$ et que pour tout $|x| > a$, $\mathcal{L}_a h(x) = \frac{1}{2}\Delta g(x)$.

2. Montrer que $f(B_{t \wedge T_a})_{t \geqslant 0}$ est une martingale.

3. Pour tout $0 < a < |x| < b$, montrer que

$$\mathbb{P}_x[T_a < T_b] = \frac{1}{b-a}\left(\frac{ab}{|x|} - a\right).$$

4. Montrer que pour tout x, $\mathbb{P}_x[\forall t > 0, \; B_t \neq 0] = 1$.

5. Montrer que pour tout $R \geqslant 0$ et tout x, $\mathbb{P}_x[\exists s : \; \forall t \geqslant s, \; |B_t| \geqslant R] = 1$.

6. Montrer que pour tout x, $\mathbb{E}_x[f(B_t)] \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$.