Examen

Exercice 1. Soient B un mouvement brownien, $\varepsilon > 0$, et $B^{(\varepsilon)}$ le processus tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$B_{k\varepsilon} = B^{(\varepsilon)}_{k\varepsilon} \quad \text{et} \quad B^{(\varepsilon)} \text{ est affine sur } [k\varepsilon, (k+1)\varepsilon].$$

Montrer que $B^{(\varepsilon)}$ est à variation finie, et pour $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, identifier

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 f(B^{(\varepsilon)}_s)\, \mathrm{d}B^{(\varepsilon)}_s.$$

Exercice 2. Soit B un mouvement brownien standard de dimension n. On admet que $Z_t := \|B_t\|_2$ est un processus de Feller, de générateur infinitésimal $\mathcal{L}$. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ à support compact et telle que $f'(0) = 0$. Montrer que f appartient au domaine de $\mathcal{L}$, et déterminer $\mathcal{L}f$.

Exercice 3. Soient $b, \sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues, $\sigma \geqslant 0$, et soit (X_t) un processus adapté continu tel que

$$Y_t := X_t - \int_0^t b(s, X_s)\, \mathrm{d}s \qquad \text{et} \qquad Z_t := Y_t^2 - \int_0^t \sigma^2(s, X_s)\, \mathrm{d}s$$

sont des martingales locales.

1. On suppose que pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $\sigma(t, x) \neq 0$, et on pose $B_t := \int_0^t (\sigma(s, X_s))^{-1}\, \mathrm{d}Y_s$. Montrer que B est un mouvement brownien, et que X satisfait une équation différentielle stochastique impliquant B.

2. Pour σ général, montrer qu'après avoir éventuellement agrandi l'espace de probabilité, le processus X satisfait une équation différentielle stochastique.

Exercice 4. 1. Soient $p, a > 0$, $\beta > 1$, $\psi :]0, a] \to \mathbb{R}_+$ qui tend vers 0 en 0, et X et Y deux variables aléatoires positives telles que pour tout $\lambda > 0$ et $\delta \in]0, a]$, on a $\mathbb{P}[X > \beta\lambda \text{ et } Y \leqslant \delta\lambda] \leqslant \psi(\delta)\, \mathbb{P}[X > \lambda]$. Montrer qu'il existe une constante C qui dépend seulement de p, β et ψ telle que $\mathbb{E}[X^p] \leqslant C\mathbb{E}[Y^p]$. Indication: on pourra commencer par montrer que $\mathbb{E}[X^p] = \int_0^\infty p\, x^{p-1}\, \mathbb{P}[X > x]\, \mathrm{d}x$, puis chercher à estimer $\mathbb{E}[(X/\beta)^p]$.

2. Soient N une martingale locale (continue) partant de 0, $a < 0 < b$ et $\tau_x := \inf\{t : N_t = x\}$. Montrer que $\mathbb{P}[\tau_b < \tau_a] \leqslant -a/(b-a)$.

3. Soient M une martingale locale partant de 0, $M^*_t := \sup_{s \leqslant t} |M_s|$, $\beta > 1$ et $\delta \in]0, \beta - 1[$. Montrer que

$$\mathbb{P}[M^*_\infty > \beta\lambda \text{ et } \langle M, M\rangle_\infty^{1/2} \leqslant \delta\lambda] \leqslant \frac{\delta^2}{(\beta-1)^2} \mathbb{P}[M^*_\infty > \lambda].$$

Indication: on pourra poser $\tau := \inf\{t : |M_t| > \lambda\}$ et, sur l'événement $\{\tau < \infty\}$, $N_t := (M_{\tau+t} - M_\tau)^2 - (\langle M, M\rangle_{\tau+t} - \langle M, M\rangle_\tau)$.

4. En déduire l'une des inégalités de Burkholder-Davis-Gundy.