Examen

Sauf mention contraire, toutes les réponses doivent bien sûr être justifiées avec rigueur et précision.

Exercice 1.

1. Donner un exemple de processus de Markov qui n'est pas de Feller.
2. Donner un exemple de martingale locale qui n'est pas une (vraie) martingale.
3. Soit X une martingale continue à droite, et soient les propriétés:

   (P1) X_t converge dans L^1 quand t tend vers l'infini;

   (P2) X_t converge p.s. quand t tend vers l'infini.

   Citer (sans démontrer) une propriété équivalente à (P1). A-t-on (P1) $\Rightarrow$ (P2)? (P2) $\Rightarrow$ (P1)?

Exercice 2. Soit M une martingale locale (continue) issue de 0 et telle que $\langle M, M\rangle_\infty = \infty$.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose
$$N_\lambda(t) = \exp\left(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2}\langle M, M\rangle_t\right).$$
   Montrer que N_λ est une martingale locale.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = \inf\{t \geqslant 0 : \langle M, M\rangle_t = n\}$. Montrer que M_{T_1} est une gaussienne standard.
3. Montrer que $(M_{T_{n+1}} - M_{T_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi.
4. Montrer que $\limsup_{t\to+\infty} M_t = +\infty$ et $\liminf_{t\to+\infty} M_t = -\infty$.

Exercice 3. Soit $\mathcal{E} = \{\{x, x+1\}, x \in \mathbb{Z}\}$. (On voit $\mathbb{Z}$ comme l'ensemble des sommets du graphe dont l'ensemble des arêtes est $\mathcal{E}$.) Pour $\eta = (\eta_x)_{x\in\mathbb{Z}} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ et $e \in \mathcal{E}$, on note $\eta^e \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ la configuration définie par
$$\eta^e_x = \left|\begin{array}{ll} \eta_x & \text{si } x \notin e, \\ \eta_y & \text{si } \{x, y\} = e. \end{array}\right.$$

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions de $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{R}$ qui dépendent seulement d'un nombre fini de coordonnées. On souhaite construire un processus de Feller $(\eta(t))_{t\geqslant 0}$ à valeurs dans $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, de générateur infinitésimal $\mathcal{L}$ tel que
$$\mathcal{C} \subseteq \mathsf{Domaine}(\mathcal{L}), \tag{1}$$
$$\forall f \in \mathcal{C}, \quad \mathcal{L}f(\eta) = \sum_{e\in\mathcal{E}} \left[f(\eta^e) - f(\eta)\right]. \tag{2}$$

1. Proposer une construction graphique d'un tel processus. On admet que le processus construit est de Feller. Montrer qu'il vérifie (1) et (2).
2. Soit $\alpha \in [0,1]$ et soit π_α la mesure de probabilité sur $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ définie par $\pi_\alpha = \bigotimes_{x\in\mathbb{Z}} \mathsf{Bernoulli}(\alpha)$, où $\mathsf{Bernoulli}(\alpha)$ désigne la loi de Bernoulli de paramètre α. Montrer que pour tout $f, g \in \mathcal{C}$,
$$\int f \; \mathcal{L}g \; \mathrm{d}\pi_\alpha = \int g \; \mathcal{L}f \; \mathrm{d}\pi_\alpha.$$

3. Montrer que π_α est une mesure invariante pour le processus. (On pourra commencer par montrer que si $f \in \mathcal{C}$, alors la loi de $f(\eta(t))$ ne dépend pas de t.)

Exercice 4. Soit B un mouvement brownien issu de 0. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $g_\varepsilon(x) = \sqrt{\varepsilon + x^2}$.

1. Montrer que
$$g_\varepsilon(B_t) = \sqrt{\varepsilon} + M_t^\varepsilon + A_t^\varepsilon,$$
où M^ε est une (vraie) martingale de carré intégrable, et A^ε est un processus croissant.

2. On note $\operatorname{sgn}(x) = \mathbf{1}_{\{x>0\}} - \mathbf{1}_{\{x<0\}}$. Montrer que pour tout $t \geqslant 0$,
$$M_t^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^2} \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s)\, \mathrm{d}B_s.$$

3. En déduire qu'il existen un processus croissant A tel que pour tout $t \geqslant 0$,
$$|B_t| = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s)\, \mathrm{d}B_s + A_t.$$

4. Soit $\delta > 0$ et $0 < u < v$. Montrer que sur l'événement $\{\forall t \in [u, v],\ |B_t| \geqslant \delta\}$, on a $A_u = A_v$ p.s. En déduire que la fonction $t \mapsto A_t$ est constante sur toute composante connexe de l'ouvert $\{t \geqslant 0 : B_t \neq 0\}$.

5. On pose $\beta_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s)\, \mathrm{d}B_s$. Montrer que β est un mouvement brownien.

6. Montrer que $A_t = \sup_{s \leqslant t}(-\beta_s)$. (Le résultat de la question 4 peut être utile.)

7. Pour tout $t \geqslant 0$, déterminer la loi de A_t.