

MAGISTÈRE DE MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES
ET APPLIQUÉES ET D'INFORMATIQUE

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

MÉMOIRE DE MAGISTÈRE

Jean-Christophe Mourrat
MPI 2002

juin 2006

Table des matières

1	Curriculum vitae	5
2	Présentation du domaine de recherche	7
2.1	Marche aléatoire en milieu aléatoire : le film	7
2.2	Lois limites stables	11
2.3	Analyse spectrale du modèle de Bouchaud	13
3	Rapport de M2	15
3.1	Introduction	15
3.2	Un modèle de pièges	16
3.3	Des résultats sur les sommes de variid	20
3.3.1	Loi des grands nombres et théorème central limite	21
3.3.2	Convergence vers des lois stables	22
3.3.3	Etude des extrêmes	25
3.3.4	Et pour les autres lois ?	27
3.3.5	De la généralité des résultats - application au REM	28
3.4	Retour au modèle initial	29
3.4.1	Résolution	29
3.4.2	Quelques idées de démonstration	31
3.4.3	Pourquoi ça marche ?	32
3.5	Annexe : variation régulière	33
4	Mémoire de maîtrise	35
4.1	L'origine physique du problème	35
4.2	La transition de phase sur un modèle simple	36
4.2.1	Présentation du problème	36
4.2.2	Résolution	37
4.3	Le modèle à 3 spins	38
4.3.1	Présentation du modèle	38
4.3.2	Approche algorithmique	39
4.3.3	Point de vue théorique	41
4.4	La méthode du second moment	43
4.4.1	Le modèle de Sherrington-Kirkpatrick	43

4.4.2	Le Random Energy Model	45
4.5	Conclusion	48
	Références	48

Chapitre 1

Curriculum vitae

2002-2003

- Licence de Mathématiques
 - Analyse 1
 - Intégration et probabilités
 - Analyse et modèles mathématiques
 - Théorie algorithmique des nombres
- Licence de Physique
 - Mécanique quantique
 - Physique statistique
 - Modèles probabilistes et réseaux aléatoires
 - Electromagnétisme et relativité
- Mémoire de maîtrise : *Verres de spins et transitions de phase*, sous la direction de T. Bodineau (voir chapitre 4).

2003-2004

- Maîtrise de mathématiques
 - Algèbre 1
 - Algèbre 2
 - Analyse complexe
 - Processus stochastiques
- Licence d'informatique
 - Logique mathématique
 - Algorithmique et programmation
 - Systèmes digitaux
 - Langages formels, calculabilité et complexité

2004-2005

- Préparation à l'agrégation de mathématiques à l'ENS de Lyon (rang : 12).
- Colleur au lycée du Parc pour la classe de MP* de Nicolas Tosel.

2005-2006

- M2 de Probabilités et statistiques (Orsay)
 - Percolation et modèle d'Ising (W. Werner)
 - Grandes déviations et inégalités de concentration (P. Massart)
 - Calcul stochastique (O. Raimond)
 - Processus stochastiques (T. Duquesne)
 - Groupe de travail *Probability on trees and networks*.
 - Introduction à la biologie pour les mathématiciens (F. Taddei)
- Stage de M2 sous la direction de G. Ben Arous à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (voir chapitre 3).
 - Neural networks and biological modeling (W. Gerstner)
 - Matrices aléatoires (G. Ben Arous)

Chapitre 2

Présentation du domaine de recherche

2.1 Marche aléatoire en milieu aléatoire : le film

Pour représenter un environnement peu régulier (par exemple avec des trous), une manière “classique” de procéder est de considérer que le milieu est le résultat d’une expérience aléatoire (les trous sont répartis “au hasard”). On peut alors s’intéresser aux propriétés d’une diffusion dans un tel milieu. L’aléa du modèle proposé est dans ce cas double : d’une part le milieu est tiré au sort, d’autre part on effectue une marche aléatoire dans ce milieu. Cette *marche aléatoire en milieu aléatoire* peut servir par exemple à représenter une molécule de type A baignant dans une solution remplie de molécules de type B : la molécule de type A se déplace de manière désordonnée au sein d’un environnement lui-même peu structuré. Une des quantités auxquelles on aimerait accéder est la probabilité qu’au temps t la particule de type A ait rencontré une particule de type B (pour réagir avec elle), ou au comportement asymptotique pour t grand de cette quantité.

Précisons un modèle de pièges. On se place sur le réseau \mathbb{Z}^d . Un *environnement* est la donnée d’un élément $\omega \in \Omega = \{0; 1\}^{\mathbb{Z}^d}$: on dira qu’il y a un piège en $x \in \mathbb{Z}^d$ si $\omega(x) = 1$; qu’il est sans piège sinon. Pour la loi de ω , on choisit le produit de lois de Bernoulli de paramètre q , que l’on notera \mathbb{P} . C’est dire qu’indépendamment pour chaque point, $x \in \mathbb{Z}^d$ a une probabilité q d’être un piège. On supposera que q est inférieur à la probabilité de percolation critique, de telle sorte qu’il existe toujours une composante connexe infinie sans piège. On pose enfin $(X_t)_{t \geq 0}$ la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^d partant de 0, de loi \mathbf{P}_0 .

La quantité que l’on se propose d’étudier est la probabilité de survie d’une particule, plus particulièrement aux temps longs. On note le temps de survie $\tau(\omega) = \inf\{t \geq 0 : X_t \in \mathcal{O}(\omega)\}$, où $\mathcal{O}(\omega) = \{x \in \mathbb{Z}^d : \omega(x) = 1\}$ désigne l’ensemble des pièges. A ce stade, deux approches sont possibles :

- Soit on cherche l’asymptotique pour une réalisation de l’environnement *fixée*, c’est à dire un équivalent pour un environnement donné de $p(t, \omega) := \mathbf{P}_0[\tau(\omega) > t]$ pour $t \rightarrow \infty$. On parlera de l’*asymptotique presque sûre* (en anglais *quenched*).
- Soit on calcule la moyenne sur *toutes* les réalisations possibles de l’environnement, c’est à dire qu’on considère $\langle p(t) \rangle := \mathbb{P} \otimes \mathbf{P}_0[\tau(\omega) > t]$, puis on regarde le comportement quand $t \rightarrow +\infty$. On parlera par la suite de l’*asymptotique en moyenne* (en anglais *annealed*).

Question 2.1. *Les deux approches donnent-elles les mêmes résultats ?*

Comme le montrent les deux théorèmes suivants, la réponse à cette question est “non”.

Théorème 2.1.1 (Donsker, Varadhan [DV79]). *La probabilité de survie en moyenne vérifie :*

$$-\log \langle p(t) \rangle \sim c(d, q) t^{d/(d+2)} \quad (t \rightarrow \infty)$$

où $c(d, q) > 0$ ne dépend que de la dimension de l’espace d et de la densité des pièges q .

Théorème 2.1.2 (Sznitman [Sznit], Antal [An95]). *Conditionnellement au fait que l’origine fait partie d’une composante connexe sans pièges infinie, on a presque sûrement :*

$$-\log p(t, \omega) \sim \tilde{c}(d, q) \frac{t}{(\log t)^{2/d}} \quad (t \rightarrow \infty)$$

où $\tilde{c}(d, q) > 0$ est une constante (déterministe) ne dépendant que de la dimension de l’espace d et de la densité des pièges q .

On peut avoir une compréhension fine du comportement des particules en temps long. Voyons en effet la proposition suivante :

Proposition 2.1.3. *Soit τ_R le temps de sortie de la boule euclidienne de centre 0 et de rayon R . On a :*

$$-\log \mathbf{P}_0[\tau_R > t] \sim \lambda_R t \quad (t \rightarrow \infty)$$

avec

$$\lambda_R \sim \frac{\lambda_1}{R^2} \quad (R \rightarrow \infty)$$

De manière informelle, on a

$$-\log \mathbf{P}_0[\tau_R > t] \simeq \lambda_1 \frac{t}{R^2}$$

En utilisant ce fait, on peut montrer que le “scénario qui compte”, c’est-à-dire le comportement des particules qui suffit à obtenir les asymptotiques précédentes, est le suivant :

- Pour l’asymptotique en moyenne, les particules qui contribuent sont celles qui naissent dans une clairière de taille de l’ordre de $t^{1/(d+2)}$.
- Pour l’asymptotique presque sûre, les particules qui comptent sont celles qui parviennent à trouver une clairière de taille $(\log t)^{1/d}$. On peut également montrer qu’une telle clairière se trouve à une distance de l’ordre de t du point de départ (en fait un tout petit peu moins), ce qui correspond à un événement fortement atypique : la marche commence par avoir une trajectoire quasiment balistique avant de trouver la clairière dont on vient de préciser la taille.

Question 2.2. *On vient de voir combien les deux asymptotiques sont différentes, et correspondent à des comportements typiques très différents. Lequel de ces deux points de vue est celui qui intéresse le physicien ?*

Une réponse raisonnable pourrait être la suivante : c’est l’asymptotique presque sûre qui répond vraiment au problème physique, mais l’asymptotique en moyenne est généralement plus facile à calculer et offre une première possibilité pour aborder un problème. Historiquement c’est effectivement le cas pour l’exemple précédent. C’est ce qui était proposé par exemple par G. Ben Arous et A. Ramírez dans [BR00], où un processus de saturation est analysé, initialement introduit pour répondre à un problème de gestion de déchets nucléaires proposé par EDF.

Mais reprenons l’analogie de la réaction chimique. Si on réalise l’expérience, un très grand nombre de particules sont en jeu en différents points de l’espace. Le fait d’observer le milieu en différents points très éloignés va créer un effet de moyenne, et dans ce cas, c’est plutôt l’asymptotique *annealed* qui est significative. En fait l’approche à privilégier semble dépendre de la taille de la population considérée.

Les questions qui se posent sont les suivantes : à partir de quelle taille de population cette moyennisation spatiale a-t-elle lieu ? Y a-t-il des comportements intermédiaires entre les deux précédemment explicités ? Pour y répondre, introduisons la probabilité de survie moyennée sur une boîte de taille L $\Lambda_L = \{x \in \mathbb{Z}^d : \|x\|_\infty \leq L\}$, où $\|x\|_\infty = \sup_i |x_i|$:

$$p_L(t, \omega) = \frac{1}{|\Lambda_L|} \sum_{x \in \Lambda_L} p(x, t, \omega)$$

($p(x, t, \omega)$ désigne la probabilité de survie jusqu’au temps t de la marche aléatoire simple partant de x dans l’environnement ω)

Il s’agit maintenant de regarder comment se comporte $p_L(t, \omega)$ quand L et t tendent simultanément vers l’infini. Si L varie très peu comparé à t , on s’attend à retrouver l’asymptotique presque sûre. A l’inverse, si L croît suffisamment vite, on espère retrouver l’asymptotique en moyenne.

La question qui se pose maintenant est de savoir dans quelles échelles on peut espérer que ces résultats soient vrais. On a dit précédemment que, dans

le cas de l'asymptotique presque sûre, il s'agissait de trouver des clairières de taille $(\log t)^{1/d}$, lesquelles se trouvent en gros à distance t de l'origine. Si on prend une boîte de taille plus grande que t , on va donc trouver des clairières plus grandes que $(\log t)^{1/d}$ dans la boîte. Il est donc naturel de supposer $L(t) \leq t$. En fait, cette condition est suffisante :

Théorème 2.1.4. *Si $L(t) \leq t$, alors on a presque sûrement :*

$$-\log p_L(t, \omega) \sim \tilde{c}(d, q) \frac{t}{(\log t)^{2/d}}$$

Pour ce qui est de l'asymptotique en moyenne, il s'agit en revanche de trouver des clairières de taille de l'ordre de $t^{1/(d+2)}$. Il est donc naturel de poser :

$$L(t) = \exp(\gamma t^{d/(d+2)})$$

car dans ce cas par le même calcul que précédemment, les clairières sont du bon ordre de grandeur. On a en effet le résultat suivant :

Théorème 2.1.5. *Si $\gamma > \gamma_1$, alors on a une loi des grands nombres :*

$$\frac{p_L(t, \omega)}{\langle p(t) \rangle} \rightarrow 1$$

En particulier, on a :

$$-\log p_L(t, \omega) \sim c(d, q) t^{d/(d+2)}$$

Reste à voir les régimes intermédiaires...

Théorème 2.1.6. *Si $\gamma < \gamma_1$, alors la loi des grands nombres cesse d'être vérifiée :*

$$\frac{p_L(t, \omega)}{\langle p(t) \rangle} \rightarrow 0$$

Il existe une fonction $a(\gamma)$ vérifiant $a(\gamma_1) = 1$ et $a(\gamma) \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} +\infty$ telle que :

$$-\log p_L(t, \omega) \sim a(\gamma) c(d, q) t^{d/(d+2)}$$

Théorème 2.1.7. *Si $\log L \ll t^{d/(d+2)}$ et $t \leq L$, alors on a l'asymptotique suivante :*

$$-\log p_L(t, \omega) \sim \tilde{c}(d, q) \frac{t}{(\log L)^{2/d}}$$

Ce dernier résultat se comprend facilement : les particules qui contribuent à cette asymptotique sont celles qui sont nées dans la clairière la plus grande de la boîte.

On est maintenant en mesure de décrire les comportements typiques suivant les différentes échelles de temps. Donnons-nous en effet une grande

boîte, dans laquelle naît une particule en chaque point. Aux temps courts, dont l'échelle est précisée par le théorème 2.1.5, la particule typique est née dans une clairière de taille $t^{1/(d+2)}$. Le temps passe, et arrive le seuil précisé par γ_1 . La taille des clairières typiques est alors modifiée par le facteur $a(\gamma)$. Ensuite, on passe dans le régime du théorème 2.1.7 : la particule typique qui a survécu jusqu'à ce point est celle qui est née dans la plus grande clairière de la boîte. Enfin, dans l'échelle du théorème 2.1.4, on passe dans le régime presque sûr : les (rares !) particules qui ont réussi à survivre sont alors celles qui sont parties à une distance de l'ordre de t chercher une clairière dont le rayon est de l'ordre de $(\log t)^{1/d}$. L'aventure paye sur le (très) long terme. . .

2.2 Lois limites stables

Regardons plus précisément ce qui se passe sur \mathbb{Z} . Les pièges séparent des clairières, et on peut dire que le placement des pièges revient à tirer au sort indépendamment des tailles de clairières de loi géométrique. La probabilité de survie dans une clairière donnée est environ :

$$\mathbf{P}[\tau > t] \simeq \exp\left(-\lambda \frac{t}{R^2}\right)$$

où R est la taille de la clairière. Ainsi, regarder la probabilité de survie moyenne sur une grande échelle revient à regarder des sommes de la forme :

$$S_N(t) = \sum_{i=1}^N e^{tX_i}$$

où les X_i sont des variables aléatoires indépendantes reliées aux tailles des clairières, de loi géométrique, et N mesure l'échelle de l'observation. Pour simplifier, on suppose que la loi des X_i est de la forme :

$$\mathbb{P}[X > x] \simeq \exp\left(-c \frac{1}{(-x)^\rho}\right) \quad (x \rightarrow 0^-)$$

ce qui revient à remplacer une loi géométrique par une loi exponentielle. ρ est un paramètre qui vaut 1/2 pour le cas exposé dans \mathbb{Z} .

Comme précédemment, la question est de savoir comment se comporte la somme quand N et t tendent simultanément vers l'infini. On a :

$$\mathbb{E}[S_N(t)] = Ne^{-H(t)}$$

où $H(t) = -\log \mathbb{E}[e^{tX}]$. Il semble donc naturel de poser une normalisation de la forme :

$$N \sim e^{\lambda H(t)}$$

En fait on a besoin d'une version légèrement modifiée de H , équivalente à H_0 en l'infini ($H \sim H_0$). On posera donc plutôt :

$$N \sim e^{\lambda H_0(t)}$$

Alors on peut montrer le résultat suivant :

Théorème 2.2.1. *Si $\lambda > \lambda_2$, alors un théorème central limite est vérifié :*

$$\frac{S_N(t) - \mathbb{E}[S_N(t)]}{\sqrt{\text{Var}[S_N(t)]}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{(loi)} \mathcal{N}(0, 1)$$

Si $\lambda < \lambda_2$, alors il existe $A(t)$, $B(t)$ tels que :

$$\frac{S_N(t) - A(t)}{B(t)} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{(loi)} \mathcal{F}_\alpha$$

où \mathcal{F}_α est une loi stable de paramètre α .

On peut montrer que α tend vers 2 quand λ tend vers λ_2 . De plus, $\alpha = 1$ correspond à un $\lambda = \lambda_1$ qui est le point de transition pour la loi des grands nombres : elle est vérifiée si $\lambda > \lambda_1$, auquel cas on peut choisir $A(t) = \mathbb{E}[S_N(t)]$; ne l'est pas si $\lambda < \lambda_1$, où on peut prendre $A(t) = 0$.

Ce résultat est beaucoup plus fin que les résultats obtenus pour la marche aléatoire du chapitre précédent. La question qui se pose naturellement est donc la suivante :

Question 2.3. *A-t-on une convergence similaire de p_L vers des lois stables pour la marche aléatoire en milieu aléatoire ?*

La réponse à cette question paraît très (trop ?) délicate à traiter. En dimension 1, comme on l'a vu, on peut expliciter les choses et mener les calculs, et on montre effectivement un résultat similaire (bien qu'il faille changer légèrement la loi stable, cette petite modification étant due au caractère discret de la marche). Mais en dimension supérieure, les choses se compliquent nettement, la forme et la taille des claires n'est pas du tout claire, ni même leur délimitation...

Ce résultat sur les sommes de variables aléatoires indépendantes n'en garde pas moins un grand intérêt. De manière purement théorique, il relie d'un côté ($N \rightarrow \infty$, t (presque) constant) les théorèmes du genre loi des grands nombres et théorème central limite, et de l'autre les résultats de théorie des extrêmes (N (presque) constant, $t \rightarrow \infty$). Il montre de plus que les lois stables sont sans doute appelées à jouer un rôle plus important que de simples cas pathologiques du théorème central limite.

On peut également montrer que cette description en termes de lois stables s'applique parfaitement dans le cadre du Random Energy Model.

2.3 Analyse spectrale du modèle de Bouchaud

Considérons maintenant un autre type de marche aléatoire en milieu aléatoire. Cette fois, il ne s'agit plus de "tuer" une particule, mais de la ralentir ou de l'accélérer suivant l'endroit où elle se trouve. Plus précisément, pour chaque point $x \in \mathbb{Z}^d$, on tire au sort un temps d'attente aléatoire τ_x , tel que les $(\tau_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$ forment une famille de variables aléatoires positives indépendantes et identiquement distribuées.

On définit le taux de saut d'un point x à un de ses voisins y par :

$$w_{x,y} = \tau_x^{-(1-a)} \tau_y^a$$

où $a \in [0, 1]$ est un paramètre fixé. On peut exprimer le générateur de la chaîne de Markov de la façon suivante :

$$Lf(x) = \sum_{y \sim x} w_{x,y} (f(y) - f(x))$$

Si $a = 0$, la chaîne de Markov a le comportement suivant : arrivé au site x , on attend un temps exponentiel de paramètre τ_x avant de choisir uniformément un voisin vers qui aller. Aux changements de temps près, on retrouve donc une marche aléatoire simple.

La situation est moins évidente si $a \neq 0$. En effet, la marche arrivée en un site où τ est très grand (devant les temps d'attente de ses voisins) aura tendance à rester moins longtemps sur ce site que dans le cas où $a = 0$, mais une fois sur un site voisin, aura une forte tendance à retourner sur le site précédent.

On ne s'intéresse pas ici à la question (légitime) de savoir quelles hypothèses sur la loi de τ garantiraient un résultat de "trivialité" (au sens où l'effet des τ disparaîtrait à la limite), mais plutôt au comportement de la marche dans un milieu fortement inhomogène. Pour cette raison, on fait en sorte que τ puisse prendre de très grandes valeurs avec une bonne probabilité, disons $\mathbb{E}[\tau] = \infty$. Plus précisément, on choisit la loi de τ comme étant une loi stable de paramètre α , avec $0 < \alpha < 1$.

Moyennant un rééchellement approprié, on peut montrer qu'en dimension $d = 1$ la marche converge vers un processus appelé diffusion FIN (de L.R.G. Fontes, M. Isopi et C.M. Newman), et ce quelle que soit la valeur de a . En dimension supérieure, on peut également identifier le processus limite, mais seulement dans le cas où $a = 0$. A partir de ces résultats de convergence, on peut en déduire des propriétés de vieillissement (pour une introduction au sujet, on pourra consulter [BČ06]).

Une idée à développer est d'attaquer le problème $a \neq 0$ sous un angle assez différent de l'approche "trajectorielle", à savoir étudier le spectre du générateur. Deux papiers d'A. Bovier et A. Faggionato vont dans ce sens. Le premier ([BF05]) traite de l'étude spectrale du modèle de Bouchaud dans

le cas du graphe complet. Dans ce cas, un calcul explicite permet d'accéder au spectre du générateur (et aux vecteurs propres associés) et permet d'en déduire des propriétés de vieillissement. Quant au second ([BF06]), il s'agit de mener l'étude du haut du spectre du générateur de la marche de Sinaï sur \mathbb{Z} , qui permet de montrer des résultats comparables. Une étude similaire semble possible dans le cas du modèle de Bouchaud sur \mathbb{Z} , comme peuvent nous en convaincre ces lignes tirées de [BČ06] :

“What is the behaviour of the edge of the spectrum for the generator of the dynamics? This might be close to, but easier than the same question solved for Sinai’s random walk by [BF06]”.

Reste à montrer que cette affirmation est vraie, puis à prolonger la méthode en dimension supérieure !

Chapitre 3

Différentes échelles d'observation d'une marche aléatoire en milieu aléatoire

3.1 Introduction

Pour représenter un environnement peu régulier (par exemple avec des trous), une manière “classique” de procéder est de considérer que le milieu est le résultat d’une expérience aléatoire (les trous sont répartis “au hasard”). On peut alors s’intéresser aux propriétés d’une diffusion dans un tel milieu. L’aléa du modèle proposé est dans ce cas double : d’une part le milieu est tiré au sort, d’autre part on effectue une marche aléatoire dans ce milieu. Cette *marche aléatoire en milieu aléatoire* peut servir par exemple à représenter une molécule de type A baignant dans une solution remplie de molécules de type B : la molécule de type A se déplace de manière désordonnée au sein d’un environnement lui-même peu structuré. Une des quantités auxquelles on aimerait accéder est la probabilité qu’au temps t la particule de type A ait rencontré une particule de type B (pour réagir avec elle), ou au comportement asymptotique pour t grand de cette quantité. A ce stade, deux approches sont possibles :

- Soit on cherche l’asymptotique pour une réalisation de l’environnement *fixée*. On parlera de l’*asymptotique presque sûre* (en anglais *quenched*).
- Soit on calcule la moyenne sur *toutes* les réalisations possibles de l’environnement, puis on regarde le comportement quand $t \rightarrow +\infty$. On parlera par la suite de l’*asymptotique en moyenne* (en anglais *annealed*).

Les termes *a quench* et *an annealing* sont empruntés au vocabulaire de la métallurgie. Le premier désigne une trempe, c’est-à-dire le refroidissement

brutal d'un matériau. Cette opération a pour effet de "fixer" le désordre de haute température. Un refroidissement lent permettrait au contraire la cristallisation du matériau. L'opération inverse est le recuit, en anglais *annealing*. Pour plus de détails, on pourra consulter [Wk]

Question 3.1. *Les deux approches donnent-elles les mêmes résultats ?*

Pour répondre à cette question, observons un modèle plus précisément.

3.2 Un modèle de pièges

On va considérer la marche aléatoire simple sur le réseau \mathbb{Z}^d , lequel sera muni d'un certain nombre de pièges (on peut toujours penser à l'analogie chimique présentée au paragraphe précédent).

On définit un environnement aléatoire *via* la mesure produit \mathbb{P} sur $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ muni de la tribu produit de telle façon que $\mathbb{P}(\omega(x) = 1) = q$ ($0 < q < 1$, $x \in \mathbb{Z}^d$, $\omega(x)$ désignant la coordonnée indexée par x pour $\omega \in \Omega$). On notera l'espérance associée à \mathbb{P} : $\langle f \rangle = \int f d\mathbb{P}$. Un élément $\omega \in \Omega$ désigne un environnement. Si $\omega(x) = 1$, on dira que x est un piège ; sinon, on dira que x est libre.

Notons $(X_t)_{t \geq 0}$ une marche aléatoire simple à temps continu dans \mathbb{Z}^d partant de 0, et \mathbf{P}_0 sa loi.

On s'intéresse au moment où la marche "tombe dans un piège", à savoir au temps d'arrêt $\tau(\omega) = \inf\{t \geq 0 : X_t \in \mathcal{O}(\omega)\}$, où $\mathcal{O}(\omega) = \{x \in \mathbb{Z}^d : \omega(x) = 1\}$ désigne l'ensemble des pièges. Pour alléger la notation, on écrira $p(t, \omega)$ pour $\mathbf{P}_0(\tau(\omega) > t)$, la probabilité de "survie" jusqu'au temps t , et $\langle p(t) \rangle = \langle p(t, \omega) \rangle$.

Théorème 3.2.1 (Donsker, Varadhan [DV79]). *La probabilité de survie en moyenne est donnée par :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{t^{d/(d+2)}} \log \langle p(t) \rangle = c(d, q) \quad (3.2.1)$$

où $c(d, q) > 0$ ne dépend que de la dimension de l'espace d et de la densité des pièges q .

Autrement dit, on a :

$$\langle p(t) \rangle = \exp\left(- (c + o(1)) t^{d/(d+2)}\right)$$

Commençons par énoncer des résultats généraux sur la marche aléatoire simple. Son générateur infinitésimal $-\mathcal{G}$ est donné par :

$$\mathcal{G}f(x) = \frac{1}{2d} \sum_{y \sim x} (f(x) - f(y))$$

\mathcal{G} est symétrique dans $L^2(\mathbb{Z}^d)$. On a de plus :

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}f|f) &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \frac{1}{2d} \sum_{y: y \sim x} (f(x) - f(y))f(x) \\ &= \frac{1}{2d} \sum_{x, y: x \sim y} (f(x) - f(y))f(x) \\ &= \frac{1}{2d} \sum_{x, y: x \sim y} (f(y) - f(x))f(y) \\ &= \frac{1}{4d} \sum_{x, y: x \sim y} (f(y) - f(x))^2 \end{aligned}$$

Pour une partie finie U de \mathbb{Z}^d , considérons la marche aléatoire tuée quand elle sort de U . Alors le générateur infinitésimal associé \mathcal{G}_U est symétrique dans $L^2(U)$, donc diagonalisable en base orthonormée. Appelons (λ_i) ses valeurs propres rangées par ordre croissant, et (ψ_i) des vecteurs propres normés associés. On a, pour toute fonction f nulle en dehors de U : $\mathcal{G}_U f = \mathbf{1}_U \mathcal{G} f$, et donc :

$$(\mathcal{G}_U f|f) = \frac{1}{4d} \sum_{x \sim y} (f(y) - f(x))^2$$

Comme $\lambda_1 = \inf_{(f|f)=1} (\mathcal{G}_U f|f)$, λ_1 est positif. De plus, ψ_1 est de signe constant, mettons positif. En effet, s'il changeait de signe, alors $|\psi_1|$ serait tel que $(\mathcal{G}_U |\psi_1| | |\psi_1|) < (\mathcal{G}_U \psi_1 | \psi_1)$, ce qui contredit le fait que ψ_1 est un vecteur propre associé à la plus petite valeur propre de \mathcal{G}_U . Pour la même raison, ψ_1 ne s'annule pas sur U , car dans le cas contraire on pourrait construire une modification ψ' de ψ_1 telle que $(\mathcal{G}_U \psi' | \psi') < (\mathcal{G}_U \psi_1 | \psi_1)$.

Enfin, on a $\lambda_2 \neq \lambda_1$. En effet, dans le cas contraire, ψ_2 serait aussi de signe constant, et ne pourrait donc pas être orthogonal à ψ_1 . Ces résultats nous permettent d'énoncer la proposition suivante :

Proposition 3.2.2. *Notons T_U le temps de sortie de U . On a :*

$$\sum_{x \in U} \mathbf{P}_x(T_U > t) \geq e^{-\lambda_1 t} \quad (3.2.2)$$

et pour tout $x \in U$:

$$\mathbf{P}_x(T_U > t) = e^{-(\lambda_1 + o(1))t} \quad (3.2.3)$$

Démonstration. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{x \in U} \mathbf{P}_x(T_U > t) &= (\exp(-t\mathcal{G}_U) \mathbf{1}_U | \mathbf{1}_U) \\ &= \sum_i e^{-\lambda_i t} (\mathbf{1}_U | \psi_i)^2 \end{aligned}$$

Et $(\mathbf{1}_U|\psi_1) = \sum \psi_1(x) \geq \sum \psi_1(x)^2 = 1$ (car $0 \leq \psi_1 \leq 1$). Pour montrer (3.2.3), on procède de même :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x(T_U > t) &= (\exp(-t\mathcal{G}_U)\mathbf{1}_{\{x\}}|\mathbf{1}_U) \\ &= \sum_i e^{-\lambda_i t} (\mathbf{1}_{\{x\}}|\psi_i)(\psi_i|\mathbf{1}_U) \end{aligned}$$

Et on a vu que ψ_1 ne s'annule pas sur U , donc $(\mathbf{1}_{\{x\}}|\psi_1)(\psi_1|\mathbf{1}_U) \neq 0$, ce qui permet de conclure. \square

On aimerait maintenant savoir comment est changé $\lambda_1 = \lambda_1(U)$ quand U "devient très grand". Considérons plutôt que U est un ouvert de \mathbb{R}^d , et notons $\lambda_1(U) = \lambda_1(U \cap \mathbb{Z}^d)$. Soit \mathcal{G}_U^α l'opérateur correspondant à \mathcal{G}_U , mais sur le réseau $1/\alpha \mathbb{Z}^d$, et $\lambda_1^\alpha(U)$ sa plus petite valeur propre. Il est donné par $\mathcal{G}_U^\alpha f(x) = \frac{1}{2d} \sum_{\pm e \in \mathcal{B}} (f(x) - f(x + 1/\alpha e))$, et vérifie donc $\alpha^2 \mathcal{G}_U^\alpha f \rightarrow -\Delta f$ ($\alpha \rightarrow \infty$) où Δ est le laplacien continu. Notant $l(U)$ la plus petite valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ restreint à U (avec condition au bord nulle), on a :

$$\lambda_1(\alpha U) = \lambda_1^\alpha(U) \sim \frac{l(U)}{\alpha^2} \quad (\alpha \rightarrow +\infty) \quad (3.2.4)$$

Démonstration du théorème 3.2.1. Nous avons maintenant tous les éléments en main pour trouver une minoration du membre de gauche de (3.2.1). En effet :

$$\begin{aligned} \langle p(t) \rangle &= \mathbb{P} \otimes \mathbf{P}_0[\tau(\omega) > t] \\ &\geq \mathbb{P} \otimes \mathbf{P}_0[B(0, R) \cap \mathcal{O}(\omega) = \emptyset \text{ et } \forall s \leq t, X_s \in B(0, R)] \end{aligned}$$

où $B(0, R)$ désigne la boule (euclidienne) de \mathbb{R}^d de centre 0 et de rayon R . Si l'on note w_d le volume de la boule unité, $l_d > 0$ la plus petite valeur propre du laplacien sur la boule unité (avec conditions aux bords égales à zéro), et ν tel que $e^{-\nu} = 1 - q$, il vient d'après (3.2.3) et (3.2.4) :

$$\langle p(t) \rangle \geq \exp\left(-\nu w_d R^d + o(R^d) - \frac{l_d}{R^2} t + o\left(\frac{t}{R^2}\right)\right)$$

$(\nu w_d R^d + \frac{l_d}{R^2} t)$ est minimale pour $R^{d+2} = \frac{2l_d}{d\nu w_d} t$, ce qui montre que

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{t^{d/(d+2)}} \log \langle p(t) \rangle \geq c(d, q)$$

avec

$$c(d, q) := \frac{d+2}{2} \left(\frac{2l_d}{d}\right)^{d/(d+2)} (\nu w_d)^{2/(d+2)} \quad (3.2.5)$$

Pour l'inégalité réciproque, il s'agit d'établir un principe des grandes déviations pour la marche aléatoire, on pourra consulter l'article de M. Donsker et S.R.S. Varadhan [DV79].

□

Remarque 3.2.3. *Ce comportement est nettement différent de celui observé dans le cas où les pièges seraient placés de manière régulière. En effet on a :*

Proposition 3.2.4. *Si les pièges sont placés sur $k \mathbb{Z}^d$ ($k \in \mathbb{N}^*$), alors :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{t} \log p(t) = k > 0$$

Démonstration. En fait on peut réduire l'espace à un tore par symétrie. On est alors ramenés à étudier une marche aléatoire sur un graphe fini, certains points étant des pièges. Un calcul similaire à ceux effectués dans la démonstration de la proposition 3.2.2 permet alors de conclure. □

Revenons maintenant au problème initial. Il reste à étudier l'asymptotique presque sûre (*quenched*), ce qui est un problème plus délicat...

Théorème 3.2.5 (Sznitman [Sznit], Antal [An95]). *Conditionnellement au fait que l'origine fait partie d'une composante connexe sans pièges infinie, on a presque sûrement :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{(\log t)^{2/d}}{t} \log p(t, \omega) = \tilde{c}(d, q)$$

où $\tilde{c}(d, q) > 0$ est une constante (déterministe) ne dépendant que de la dimension de l'espace d et de la densité des pièges q .

Autrement dit, on a :

$$p(t, \omega) = \exp \left(-(\tilde{c} + o(1)) \frac{t}{(\log t)^{2/d}} \right)$$

Remarque 3.2.6. *Si la composante connexe contenant l'origine est finie, on a $p(t, \omega) \simeq e^{-kt}$.*

On peut donc répondre à la première question posée : les asymptotiques presque sûre et en moyenne sont différentes.

Question 3.2. *Quelle est celle qui intéresse le physicien ?*

Une réponse raisonnable pourrait être la suivante : c'est l'asymptotique presque sûre qui répond vraiment au problème physique, mais l'asymptotique en moyenne est généralement plus facile à calculer et offre une première possibilité pour aborder un problème. Historiquement c'est effectivement le

cas pour l'exemple précédent. C'est ce qui était proposé par exemple par G. Ben Arous et A. Ramírez dans [BR00], où un processus de saturation est analysé, initialement introduit pour répondre à un problème de gestion de déchets nucléaires proposé par EDF.

Mais reprenons l'analogie de la réaction chimique. Si on réalise l'expérience, un très grand nombre de particules sont en jeu en différents points de l'espace. Le fait d'observer le milieu en différents points très éloignés va créer un effet de moyenne, et dans ce cas, c'est plutôt l'asymptotique *annealed* qui est significative. En fait l'approche à privilégier semble dépendre de la taille de la population considérée.

L'idée est maintenant de rechercher une transition entre les asymptotiques presque sûre et en moyenne. Il nous faut pour cela introduire un nouveau paramètre, qui sera la taille de la population. On va commencer par considérer un processus de branchement sans diffusion, qui nous permettra d'accéder à une description précise de "ce qui se passe". Nous verrons également en quoi les résultats énoncés prennent un caractère très général. Dans une partie ultérieure, nous verrons ce que l'on peut conserver de ce modèle phénoménologique vis-à-vis des modèles de branchement-diffusion.

3.3 Des résultats sur les sommes de vaïid

On veut décrire, suivant l'article de G. Ben Arous, L. Bogachev et S. Molchanov [BBM05], le comportement de sommes de la forme :

$$S_N(t) = \sum_{i=1}^N e^{tX_i}$$

où (X_i) est une suite de variables aléatoires i.i.d., et t et N tendent vers l'infini.

(X_i) représente l'environnement aléatoire. Si pour tout i on associe un processus de branchement de taux aléatoire X_i , alors à environnement fixé, la taille moyenne du processus est donnée par e^{tX_i} .

D'un côté, pour t fixé et $N \rightarrow \infty$, les théorèmes généraux sur les sommes de variables aléatoires indépendantes vont s'appliquer (loi des grands nombres et théorème central limite). On est dans un régime *en moyenne*. A l'opposé, si N est fixé et $t \rightarrow \infty$, ce sont les valeurs extrêmes des X_i qui vont entièrement dominer la somme.

De deux choses l'une : soit les X_i sont majorés par une constante, soit ils ne le sont pas. On va d'abord traiter le cas où ils ne le sont pas ; on verra en fin de paragraphe comment adapter les résultats pour l'autre cas.

Il semble difficile de pouvoir dire quoi que ce soit sans quelques hypothèses sur la loi de X_i . On va faire l'hypothèse suivante :

$$\mathbb{P}[X_i > x] \simeq \exp(-cx^\rho) \tag{3.3.1}$$

avec $\rho > 1$ (ce qui garantit l'existence des moments de e^{tX_i}). Plus précisément, on fera l'hypothèse que

$$h(x) := -\log \mathbb{P}[X > x]$$

est à variation régulière d'indice $\rho > 1$ (voir l'annexe chapitre 3.5 pour la définition et les résultats fondamentaux concernant les fonctions à variations régulières). On peut alors définir :

$$H(t) := \log \mathbb{E}[e^{tX}]$$

D'après le théorème de Kasahara (théorème 3.5.12), $H \in R_{\rho'}$ où ρ' est donné par

$$1/\rho + 1/\rho' = 1$$

Remarque 3.3.1. Dans le cas où $\mathbb{P}[X_i > x] = \exp(-x^\rho/\rho)$, on peut se passer du théorème de Kasahara et utiliser directement la méthode de Laplace pour étudier H . En effet on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{tX}] &= \int e^{tx} x^{\rho-1} e^{-x^\rho/\rho} dx \\ &= t^{\rho'} \int y^{\rho-1} \exp\left(t^{\rho'}(y - y^\rho/\rho)\right) dy \quad (x = t^{\rho'-1}y) \end{aligned}$$

Comme $g : y \mapsto y - y^\rho/\rho$ est maximale en $y = 1$ avec $g(1) = 1/\rho'$ et $g''(1) = -(\rho - 1)$, on a :

$$H(t) = \frac{t^{\rho'}}{\rho'} + \frac{\rho'}{2} \log(t) + \frac{1}{2} \log\left(\frac{2\pi}{\rho - 1}\right) + o(1) \quad (t \rightarrow \infty) \quad (3.3.2)$$

3.3.1 Loi des grands nombres et théorème central limite

Il faut pour commencer trouver la bonne échelle pour comparer N et t . Posons :

$$\lambda := \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\log N(t)}{H(t)}$$

On se pose la question suivante : pour quelles valeurs de λ une loi des grands nombres est-elle vérifiée ? Un théorème central limite ? Les théorèmes suivants répondent à ces questions.

Théorème 3.3.2. Si $\lambda > \lambda_1 := \rho' - 1$, alors :

$$\frac{S_N(t)}{\mathbb{E}[S_N(t)]} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{(p)} 1$$

Théorème 3.3.3. Si $\lambda > \lambda_2 := 2^{\rho'} \lambda_1$, alors :

$$\frac{S_N(t) - \mathbb{E}[S_N(t)]}{\sqrt{\text{Var}[S_N(t)]}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{(loi)} \mathcal{N}(0, 1)$$

Démonstration. Pour le premier théorème, on utilise principalement l'inégalité de B. von Bahr et C.G. Esseen ([vBE65]), qui généralise l'additivité de la variance pour des variables aléatoires indépendantes :

Lemme 3.3.4 (inégalité de von Bahr-Esseen). Soit $1 \leq r \leq 2$, et soient (Y_i) des variables aléatoires indépendantes centrées telles que $\mathbb{E}|Y_i|^r$ est fini. Alors on a :

$$\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^N Y_i \right|^r \leq 2 \sum_{i=1}^N \mathbb{E}|Y_i|^r$$

On est alors armés pour montrer le théorème :

$$\frac{S_N(t)}{\mathbb{E}[S_N(t)]} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \exp(tX_i - H(t))$$

$$\mathbb{E} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \exp(tX_i - H(t)) - 1 \right|^r \leq 2N^{1-r} \mathbb{E}|e^{tX} - 1|^r$$

De plus, $\mathbb{E}|e^{tX} - 1|^r \leq \mathbb{E}(e^{tX} + 1)^r$, et en utilisant l'inégalité de Jensen, $(x + y)^r \leq 2^{r-1}(x^r + y^r)$, il vient :

$$\mathbb{E} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \exp(tX_i - H(t)) - 1 \right|^r \leq 2^r N^{1-r} (e^{H(rt) - rH(t)} + 1)$$

et, en utilisant la définition de λ , il vient :

$$\liminf \left(\frac{(1-r) \log N}{H(t)} + \frac{H(rt)}{H(t)} - r \right) = \lambda(1-r) + r^{\rho'} - r =: v_\lambda(r)$$

$v_\lambda(r)$ vaut 0 pour $r = 1$, et l'étude du signe de la dérivée en 1 montre qu'on peut trouver un $r > 1$ tel que $v_\lambda(r) < 0$, dès que $\lambda > \lambda_1$.

Pour le second théorème, on utilise les théorèmes généraux de convergence vers la loi normale pour des sommes de variables aléatoires indépendantes (voir par exemple [Petrov]).

□

3.3.2 Convergence vers des lois stables

Pour énoncer des théorèmes plus précis, il nous faut plus de finesse sur la façon dont t et N tendent vers l'infini que ce qui a été fait dans le paragraphe précédent. Pour cela il nous faut disposer d'une hypothèse de régularité

supplémentaire sur la loi des (X_i) : on va supposer que h est à *variation normale* (voir définition 3.5.8). Dans ce cas, d'après la proposition 3.5.9, h est ultimement croissant, et a donc une application réciproque bien définie $\phi(t) := (\rho h)^{-1}(t) \in R_{1/\rho}$ pour t assez grand. De même, $\psi(t) := t/\phi(t)$ est ultimement croissante. Appliquant le théorème de Kasahara 3.5.12, on obtient :

$$h(x) \sim \frac{1}{\rho} \phi^{-1}(x) \text{ donc } H(t) \sim \frac{1}{\rho'} \psi^{-1}(t)$$

On a donc construit $H_0(t) := \frac{1}{\rho'} \psi^{-1}(t)$, asymptotiquement équivalent à H et qui vérifie en outre la propriété $\psi(\rho' H_0(t)) = t$, soit :

$$\rho' H_0(t) = \rho h \left(\frac{\rho' H_0(t)}{t} \right) \quad (3.3.3)$$

Remarque 3.3.5. H et H_0 peuvent être différents. Si l'on reprend l'exemple précédent, où $\mathbb{P}[X_i > x] = \exp(-x^\rho/\rho)$, en utilisant l'équation caractéristique précédente, il vient :

$$H_0(t) = \frac{t^{\rho'}}{\rho'}$$

à comparer avec le résultat obtenu en (3.3.2).

A partir de maintenant, on supposera que $N e^{-\lambda H_0(t)} \rightarrow 1$ ($t \rightarrow \infty$).

Le but est de trouver $A(t)$, $B(t)$ tels que $\frac{S_N(t) - A(t)}{B(t)}$ converge vers une certaine loi. Si on cherche $B(t)$ sous la forme $B(t) = e^{\mu(t)H_0(t)}$, on aimerait stabiliser $N\mathbb{P}[e^{tX} > e^{\mu(t)H_0(t)}]$, ce qui revient à chercher $\mu(t)$ tel que :

$$h \left(\frac{\mu(t)H_0(t)}{t} \right) = \lambda H_0(t) \quad (3.3.4)$$

En utilisant l'équation caractéristique de H_0 (3.3.3), il vient :

$$h \left(\frac{\mu(t)H_0(t)}{t} \right) = \frac{\lambda \rho}{\rho'} h \left(\frac{\rho' H_0(t)}{t} \right) \quad (3.3.5)$$

Cette équation définit $\mu(t)$ de manière unique pour t assez grand, et de plus en utilisant la propriété de variation régulière de h on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) = \rho' \left(\frac{\lambda \rho}{\rho'} \right)^{1/\rho} \quad (3.3.6)$$

Théorème 3.3.6. *Supposons $0 < \lambda < \lambda_2$. Soient les quantités suivantes :*

$$\alpha := \left(\frac{\lambda \rho}{\rho'} \right)^{1/\rho'}$$

$$B(t) := e^{\mu(t)H_0(t)}$$

(où $\mu(t)$ est défini par (3.3.5))

$$A(t) := \begin{cases} 0 & (0 < \lambda < \lambda_1) \\ \mathbb{E}[S_N(t)] & (\lambda_1 < \lambda < \lambda_2) \end{cases}$$

Alors, quand $t \rightarrow \infty$, on a :

$$\frac{S_N(t) - A(t)}{B(t)} \Rightarrow \mathcal{F}_\alpha$$

où \mathcal{F}_α est une loi stable de paramètre α totalement asymétrique. Si Λ_α est la mesure définie sur $(0; +\infty)$ par $\Lambda_\alpha(x; +\infty) = 1/x^\alpha$, alors la fonction caractéristique de \mathcal{F}_α est donnée par :

$$\phi_\alpha(u) = \begin{cases} \exp\left(-\int(1 - e^{iux})d\Lambda_\alpha(x)\right) & (\alpha < 1) \\ \exp\left(-\int(1 - e^{iux} + iux)d\Lambda_\alpha(x)\right) & (\alpha > 1) \end{cases}$$

Démonstration. La preuve de ce résultat fait appel, comme la dernière formule le fait sentir, à la formule de Lévy-Khintchine pour les lois infiniment divisibles (on pourra consulter [Petrov]). Il y a plusieurs points à vérifier ; le plus important (celui qui donne le paramètre de la loi stable) est le suivant :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N\mathbb{P}[e^{tX} > xB(t)] = \Lambda_\alpha(x; +\infty)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[e^{tX} > xB(t)] &= \mathbb{P}[e^{tX} > xe^{\mu(t)H_0(t)}] \\ &= \mathbb{P}\left[X > \frac{\mu(t)H_0(t)}{t} + \frac{\log x}{t}\right] \\ &= e^{-h(\eta_x(t))} \end{aligned}$$

avec $\eta_x(t) := \frac{\mu(t)H_0(t)}{t} + \frac{\log x}{t}$. D'après (3.3.4), on a $h(\eta_1) = \lambda H_0(t) \sim \log N$. De plus :

$$\begin{aligned} h(\eta_x) - h(\eta_1) &= h\left(\eta_1 \left(1 + \frac{\log x}{\mu(t)H_0(t)}\right)\right) - h(\eta_1) \\ &\sim h(\eta_1) \left(\left(1 + \frac{\log x}{\mu(t)H_0(t)}\right)^\rho - 1\right) \quad (\text{variation régulière}) \\ &\sim \lambda H_0(t) \rho \frac{\log x}{\mu(t)H_0(t)} \\ &\sim \frac{\lambda \rho}{\mu(t)} \log(x) \\ &\rightarrow \alpha \log(x) \quad (\text{d'après (3.3.6)}) \end{aligned}$$

Et on a donc bien

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N\mathbb{P}[e^{tX} > xB(t)] = \frac{1}{x^\alpha}$$

□

Remarque 3.3.7. $\lambda = \lambda_1$ correspond à $\alpha = 1$, et c'est le point de transition pour la validité de la loi des grands nombres. De même, $\lambda = \lambda_2$ correspond à $\alpha = 2$.

Remarque 3.3.8. La renormalisation, en $B(t) = e^{\mu(t)H_0(t)}$, est plus lourde que dans le cas de variables aléatoires dans le domaine d'attraction d'une loi stable \mathcal{F}_α . En effet, on a d'après (3.3.6) :

$$B(t) \simeq N^{\mu(t)/\lambda} \simeq N^{\rho/\alpha} \gg N^{1/\alpha}$$

3.3.3 Etude des extrêmes

On s'intéresse maintenant aux valeurs extrêmes de $(e^{tX_i})_{1 \leq i \leq N}$. Notons $M^{(N)}(t)$ le plus grand terme parmi $(e^{tX_i})_{1 \leq i \leq N}$.

Théorème 3.3.9. Pour tout $\lambda > 0$, $M^{(N)}(t)/B(t)$ converge vers une loi de Fréchet de paramètre ϕ_α définie par $\phi_\alpha(0; x) = e^{-x^{-\alpha}}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[M^{(N)}(t) \leq xB(t)] &= \mathbb{P}[\forall i \in [1; N] : X_i \leq \eta_x(t)] \\ &= \left(1 - e^{-h(\eta_x)}\right)^N \\ &= \exp\left(-Ne^{-h(\eta_x)}(1 + o(1))\right) \end{aligned}$$

Et, comme on l'a vu précédemment, on a :

$$Ne^{-h(\eta_x)} \sim \exp[h(\eta_1(t)) - h(\eta_x(t))] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{x^\alpha}$$

□

Ainsi, pour $\alpha < 1$, le plus grand terme de $S_N(t)$ est du même ordre de grandeur que la somme. On pourrait exprimer de la même façon les lois du deuxième plus grand terme, du troisième... Mais l'expression des lois devient de moins en moins maniable. Une manière beaucoup plus naturelle de décrire la loi des extrêmes est de considérer le "processus des extrêmes" :

$$\mu_N(x; +\infty) = \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{e^{tX_i} > xB(t)\}}$$

Ce processus converge vers un processus de Poisson d'intensité Λ_α , au sens suivant :

Théorème 3.3.10. Pour tous $0 < x_1 < \dots < x_n$, notons $\Delta_i = [x_i; x_{i+1})$ (en posant $x_{n+1} = +\infty$). On a :

$$\mathbb{P}[\forall i = 1, \dots, n, \mu_N(\Delta_i) = m_i] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \frac{\Lambda_\alpha(\Delta_i)^{m_i}}{m_i!} e^{-\Lambda_\alpha(\Delta_i)}$$

Démonstration. Notons $m_0 = N - (m_1 + \dots + m_n)$. Le membre de gauche de l'équation précédente vaut :

$$\begin{aligned}
& \frac{N!}{m_0! \cdots m_n!} \left(1 - e^{-h(\eta_{x_1})}\right)^{m_0} \prod_{i=1}^n \left(e^{-h(\eta_{x_i})} - e^{-h(\eta_{x_{i+1}})}\right)^{m_i} \\
& \sim \left(1 - e^{-h(\eta_{x_1})}\right)^N \frac{N^{m_1 + \dots + m_n}}{m_1! \cdots m_n!} \prod_{i=1}^n \left(e^{-h(\eta_{x_i})} - e^{-h(\eta_{x_{i+1}})}\right)^{m_i} \\
& \sim \exp\left(-\frac{1}{x_1^\alpha}\right) \prod_{i=1}^n \frac{\left(Ne^{-h(\eta_{x_i})} - Ne^{-h(\eta_{x_{i+1}})}\right)^{m_i}}{m_i!} \\
& \sim \prod_{i=1}^n \frac{\Lambda_\alpha(\Delta_i)^{m_i}}{m_i!} e^{-\Lambda_\alpha(\Delta_i)}
\end{aligned}$$

□

On peut aussi s'intéresser aux proportions des populations. Considérons les proportions rangées par ordre décroissant :

$$R_N = \left(\frac{e^{tX^{(1)}}}{S_N(t)}, \frac{e^{tX^{(2)}}}{S_N(t)}, \dots, \frac{e^{tX^{(N)}}}{S_N(t)}, 0, \dots \right) \quad (3.3.7)$$

Ces éléments convergent-ils vers une limite ? On a vu la convergence des extrêmes le processus ponctuel de Poisson d'intensité Λ_α . Pour processus ponctuel a toujours un plus grand élément, un deuxième plus grand... De plus, si $\alpha < 1$, le processus est sommable. Appelons (Y_i) un nuage de Poisson d'intensité Λ_α , $0 < \alpha < 1$, rangé par ordre décroissant. Alors $S = \sum Y_i$ est fini p.s. et on appelle loi de Poisson-Dirichlet la loi de :

$$\left(\frac{Y_1}{S}, \frac{Y_2}{S}, \dots \right)$$

en tant qu'élément de :

$$\mathcal{S} = \left\{ (x_i)_{i \in \mathbb{N}} : x_i \geq 0 \text{ et } \sum x_i = 1 \right\}$$

muni de la tribu produit. On peut espérer, au vu du théorème précédent, que R_N converge en loi vers un processus de Poisson-Dirichlet. En fait on est ramenés à un problème de nature topologique : on sait que les (e^{tX_i}) convergent vers un nuage de Poisson d'intensité Λ_α , au sens précisé par le théorème précédent. La question est de savoir si le réordonnement de la forme (3.3.7) accepte le passage à la limite. Pour ce faire, on peut définir une distance sur l'ensemble des parties sommables de \mathbb{R} qui rende continu le réordonnement :

Définition 3.3.11. *Soit*

$$\mathcal{A} = \left\{ A \subset \mathbb{R}_+^* : \sum_{x \in A} x < \infty \right\}$$

Dans la suite, on notera $\Sigma_A = \sum_{x \in A} x$. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on peut énumérer les éléments de A dans l'ordre décroissant $A = \{a_i, i \in \mathbb{N}\}$. On choisira toujours cette représentation de A par la suite. Alors, pour A, B dans \mathcal{A} , on définit la distance de A à B par :

$$d(A, B) = \sum |a_i - b_i|$$

L'application qui à tout élément de \mathcal{A} associe la suite des proportions décroissantes est continue pour cette métrique.

Question 3.3. *Si, pour une suite de variables aléatoires $A_N \in \mathcal{A}$ on a $A_N \Rightarrow B$ au sens du théorème 3.3.10, a-t-on $A_N \Rightarrow B$ au sens de la métrique définie sur \mathcal{A} ?*

Le résultat est vrai si B est un processus ponctuel de Poisson d'intensité totale finie, mais la réponse est non dans le cas général. On peut le voir simplement par le fait suivant : l'application qui à un élément $A \in \mathcal{A}$ associe Σ_A est continue. Donc si $A_N \Rightarrow B$ au sens de cette métrique, alors $\Sigma_{A_N} \Rightarrow \Sigma_B$. Or si $A_N \Rightarrow B$ au sens du théorème 3.3.10, on peut ajouter à A_N des points qui se concentrent près de 0 avec N mais que l'on choisit de telle sorte que leur somme soit égale à 1.

Mais dans le cas qui nous occupe, on sait déjà que la somme des termes converge la somme des termes de la limite via le théorème 3.3.6. Cela permet de contrôler le comportement près de 0 et assure que R_N défini par l'équation (3.3.7) converge en loi vers un processus de Poisson-Dirichlet. Pour plus de détails sur la loi de Poisson-Dirichlet, on pourra consulter l'article de J. Pitman et M. Yor [PY97].

3.3.4 Et pour les autres lois ?

Intéressons-nous maintenant au cas où les X_i sont majorés. Alors, quitte à ajouter une constante aux X_i , on peut supposer que le support de la loi de X a pour bord droit 0, c'est-à-dire que $0 = \sup\{x : \mathbb{P}(X \leq x) < 1\}$. L'hypothèse semblable à (3.3.1) dans ce cas est :

$$\mathbb{P}[X > x] \simeq \exp\left(-c \frac{1}{(-x)^\rho}\right) \quad (x \rightarrow 0^-) \quad (3.3.8)$$

ou, plus précisément, que la fonction :

$$h(x) := -\log \mathbb{P}[X > -1/x]$$

est à variation régulière d'indice $\rho > 0$. Dans ce cas, $H(t) = -\log \mathbb{E}[e^{tX}]$ est à variation régulière d'indice ρ' , où

$$\rho' = \frac{\rho}{\rho + 1}$$

$\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ sont définis comme précédemment, de même que $A(t)$. Pour le facteur de normalisation $B(t)$, il vérifie :

$$B(t) \simeq \frac{1}{N^{\rho/\alpha}}$$

Pour plus de détails, on pourra consulter [BBM05].

Il est frappant de constater à quel point les descriptions dans les deux cas de figures présentés sont similaires, et il semble légitime d'espérer une certaine universalité. Cette transition par des lois stables n'est toutefois pas toujours au rendez-vous, si la densité de la loi des (X_i) s'approche de 0 plus "brutalement". Alors on peut montrer par exemple le résultat suivant :

Théorème 3.3.12. *Soient (X_i) des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[-1; 0]$. Alors, si $N = \lambda t$, $S_N(t)$ converge en loi vers une variable aléatoire de fonction caractéristique :*

$$\exp \left(\lambda \int_0^1 \frac{e^{iux} - 1}{x} dx \right)$$

On peut s'intéresser plus généralement à des lois dont la densité s'approche de zéro comme une fonction puissance. Dans ce cas, la loi limite est de la forme :

$$\exp \left(\alpha \int_0^1 (e^{iux} - 1) \frac{\log^n(x)}{x} dx \right)$$

Dans ces cas là, le plus grand terme ne converge pas vers l'un des trois types de lois possibles donnés par la théorie des extrêmes classique.

3.3.5 De la généralité des résultats - application au REM

D'un point de vue purement théorique, ces résultats sont un pont entre d'un côté les théorèmes du type loi des grands nombres et théorème central limite, et de l'autre les théorèmes sur les extrêmes de variables aléatoires indépendantes. Les lois stables apparaissent également de manière très naturelle, et sont donc susceptibles de jouer un rôle plus important que de simples "cas pathologiques" des théorèmes classiques.

On peut appliquer ces résultats directement à l'étude du Random Energy Model, introduit par B. Derrida comme un modèle simplifié d'un verre de spins. Donnons-nous une famille de variables aléatoires indépendantes (X_i) , de loi gaussienne centrée et de variance 1. On cherche une bonne normalisation $c(n)$ pour avoir un comportement intéressant de :

$$Z_n(\beta) := \sum_{i=1}^{2^n} e^{\beta c(n) X_i}$$

On est exactement dans le cas de figure que l'on vient d'étudier, avec la loi gaussienne standard. Reprenant les notations précédentes, on a $\rho = 2 = \rho'$. $H(t)$ s'exprime simplement :

$$H(t) = \log \mathbb{E}[e^{tX}] = \frac{t^2}{2}$$

On peut donc choisir $c(n)$ égal à \sqrt{n} . La transition concernant la loi des grands nombres a lieu quand $\lambda = \lambda_1$ selon les notations précédentes, soit :

$$\frac{\log 2^n}{H(\beta\sqrt{n})} = \rho' - 1$$

soit encore $\beta = \beta_1 := \sqrt{2 \log 2}$. C'est dire que pour $\beta > \beta_1$, la loi des grands nombres cesse d'être vérifiée et la somme est du même ordre que son plus grand terme.

De même, si l'on considère la transition vis-à-vis du théorème central limite, on trouve que dès que $\beta > \beta_2 = \sqrt{\log(2)/2}$, les fluctuations de Z_n cessent d'être gaussiennes (et la fluctuation totale est du même ordre de grandeur que la plus grande fluctuation).

On peut trouver directement l'expression de l'énergie libre du système en utilisant le théorème 3.3.6. Il vient :

(i) Si $\beta > \beta_1$, on a :

$$\log Z_n(\beta) \sim \sqrt{2 \log 2} \beta n = \log M^{(n)}(\beta) \quad (3.3.9)$$

(ii) Si $\beta < \beta_1$, on a :

$$\log Z_n(\beta) \sim \left(\frac{\beta^2}{2} + \log 2 \right) n = \log \mathbb{E} Z_n(\beta) \quad (3.3.10)$$

$$\log (Z_n(\beta) - \mathbb{E} Z_n(\beta)) \sim \sqrt{2 \log 2} \beta n \quad (3.3.11)$$

Les résultats précédents précisent cette transition de phase (ainsi que la transition concernant la validité du théorème central limite, non visible sur la seule énergie libre) via la convergence vers les lois stables, et ce pour des lois d'énergie plus générales que la seule gaussienne.

3.4 Retour au modèle initial

3.4.1 Résolution

Revenons maintenant au modèle introduit dans la partie 3.2, avec dans l'idée de tenter de décrire une situation similaire à celle que l'on vient de

décrire. Il faut commencer par introduire une “échelle d’observation”, qui jouera le rôle que jouait N dans la partie précédente. Notons $\Lambda_L = \{x \in \mathbb{Z}^d : \|x\|_\infty \leq L\}$ la boîte centrée en 0 et de rayon L (où $\|x\|_\infty = \sup_i |x_i|$). On notera en revanche $B(x, L)$ la boule de centre x et de rayon L pour la norme euclidienne. On pose :

$$p_L(t, \omega) = \frac{1}{|\Lambda_L|} \sum_{x \in \Lambda_L} p(x, t, \omega)$$

la probabilité de survie moyennée à l’échelle L , au temps t et pour l’environnement ω . On va, comme dans la partie précédente, choisir L comme une fonction croissante de t . Si $L(t)$ varie très peu, on devrait retrouver l’asymptotique *presque sûre* du théorème 3.2.1 pour la probabilité de survie ; à l’inverse, c’est l’asymptotique *en moyenne* du théorème 3.2.5 qui devrait prévaloir si L croît suffisamment rapidement. Entre les deux, on espère observer une transition similaire à celle observée dans le chapitre précédent. On écrira $f \ll g$ pour $\lim f/g = 0$. Le théorème suivant montre dans quelle échelle le résultat du théorème 3.2.5 reste valable :

Théorème 3.4.1. *Soit $L : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction croissante. Alors :*

(i) *Si $1 \ll L(t) \leq t$ et $q < 1 - p_c$ (où p_c est la probabilité critique de percolation), alors presque sûrement :*

$$\log p_L(t, \omega) \sim -\tilde{c}(d, q) \frac{t}{(\log t)^{2/d}}$$

où $\tilde{c}(d, p)$ est la constante du théorème 3.2.5.

(ii) *Si $t \leq L(t)$ et $\log L(t) \ll t^{d/(d+2)}$, alors presque sûrement :*

$$\log p_L(t, \omega) \sim -\tilde{c}(d, q) \frac{t}{(\log L(t))^{2/d}}$$

La bonne échelle pour observer la transition est de poser

$$L(t) = \exp(\gamma \frac{t^{d/(d+2)}}{d})$$

En effet on observe alors, à l’image des théorèmes 3.3.2 et 3.3.3, la validité ou la non validité de la loi des grands nombres et du théorème central limite, suivant la valeur de γ . Plus précisément :

Théorème 3.4.2 (loi des grands nombres). *Soit $\gamma_1 = \frac{2}{d+2}$.*

(i) *Si $\gamma > \gamma_1$, alors on a, au sens de la convergence en probabilité :*

$$\frac{p_L(t, \omega)}{\langle p(t) \rangle} \rightarrow 1$$

A fortiori, on a :

$$\log p_L(t, \omega) \sim -c(d, q) t^{d/(d+2)} \quad (3.4.1)$$

où $c(d, q)$ est la constante du théorème 3.2.1, définie par l'équation (3.2.5).

(i) Si $\gamma \leq \gamma_1$, alors presque sûrement :

$$\frac{p_L(t, \omega)}{\langle p(t) \rangle} \rightarrow 0$$

Théorème 3.4.3 (théorème central limite). Soit $\gamma_2 = 2^{d/(d+2)}\gamma_1$.

(i) Si $\gamma > \gamma_2$, alors :

$$\frac{p_L(t, \omega) - \langle p(t) \rangle}{\sqrt{\text{Var}_\omega(p_L(t, \omega))}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1) \quad (3.4.2)$$

(ii) Si $\gamma < \gamma_2$, alors on a, au sens de la convergence en probabilité :

$$\frac{p_L(t, \omega) - \langle p(t) \rangle}{\sqrt{\text{Var}_\omega(p_L(t, \omega))}} \rightarrow 0$$

Enfin, on aimerait connaître l'ordre de grandeur de $p_L(t, \omega)$, à l'image des résultats (3.3.9), (3.3.10) et (3.3.11). L'équation (3.4.1) donne un début de réponse. On a de plus :

Théorème 3.4.4. Soit $a(\gamma) = \frac{d}{d+2} \left(\frac{2}{d+2} \gamma \right)^{-2/d} + \gamma$. On a :

(i) Si $\gamma < \gamma_1$, alors :

$$\log p_L(t, \omega) \sim -a(\gamma)ct^{d/(d+2)}$$

(ii) Si $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$, alors pour tout $\delta > 0$, on a :

$$\frac{p_L(t, \omega) - \langle p(t) \rangle}{\exp(-(a(\gamma) - \delta)ct^{d/(d+2)})} \rightarrow 0$$

(iii) Si $\gamma > \gamma_2$, d'après (3.4.2), il suffit d'évaluer $\sqrt{\text{Var}_\omega(p_L(t, \omega))}$, et :

$$\log \sqrt{\text{Var}_\omega(p_L(t, \omega))} \sim \left(\frac{\gamma}{2} + 2^{-2/(d+2)} \right) ct^{d/(d+2)}$$

3.4.2 Quelques idées de démonstration

On utilise les résultats énoncés dans la partie 3.2, et notamment les théorèmes 3.2.1 et 3.2.5.

Par le lemme de Borel-Cantelli, on montre le résultat suivant :

Proposition 3.4.5. Soit $R_0 = \left(\frac{d}{w_{d\nu}} \right)$, $L(t) \geq t$, $R = R_0 - 1/(\log L(t))^{1/d}$ et $L'(t) = L(t) - R_0(\log L(t))^{1/d}$. Alors presque sûrement, pour t suffisamment grand, l'événement suivant a lieu :

$$\bigcup_{x \in \Lambda_{L'}} \left\{ B(x, R(\log L(t))^{1/d}) \cap (\mathcal{O}(\omega))^c = \emptyset \right\}$$

C'est dire que dans la boîte de taille L , on peut trouver une boule (euclidienne) de rayon $R_0(1 - \epsilon(t))(\log L(t))^{1/d}$. Ce fait nous permet d'estimer la valeur propre principale du laplacien sur $\Lambda_L \setminus \mathcal{O}(\omega)$, puis de minorer la probabilité de survie via l'inégalité (3.2.2).

On déduit de ce résultat la partie (ii) du théorème 3.4.1, via les équations (3.2.2) et (3.2.4). On voit de plus que, dans le régime *quenched* ($L(t) = 1$), la particule qui survit jusqu'au temps t doit trouver une clairière de taille de l'ordre de $(\log t)^{1/d}$, clairière qui se situe à une distance de l'ordre de t . Le comportement typique d'une particule qui survit jusqu'au temps t est donc une trajectoire balistique jusqu'à une distance de l'ordre de t , puis rester dans la clairière de taille $(\log t)^{1/d}$ découverte.

Dans le régime (ii) du théorème 3.4.1, la particule qui survit trouve en général la clairière en dehors de la boîte de taille L considérée.

Pour démontrer la loi des grands nombres du théorème 3.4.2, on se ramène essentiellement à utiliser l'inégalité de B. von Bahr et C.G. Esseen du lemme 3.3.4.

Pour montrer le théorème central limite du théorème 3.4.3, il s'agit de découper judicieusement la boîte en, d'une part, un ensemble de boîtes suffisamment éloignées pour pouvoir les considérer comme indépendantes, et d'autre part le reste de la boîte dont on montre que la contribution est négligeable.

3.4.3 Pourquoi ça marche ?

Il peut sembler surprenant que les résultats de la partie 3.3 soient encore valides, alors que pour chaque point on décide soit d'être un piège (ce qui correspondrait à un taux de branchement de $-\infty$, soit de ne pas l'être (taux de branchement de 0), ce qui est loin de ressembler au genre de loi étudié précédemment... Pour mieux comprendre ce qui se passe, considérons le cas de la dimension 1. Alors on a une suite de clairières, dont la taille est aléatoire de loi géométrique de paramètre q . La probabilité de survie dans une clairière, comme on l'a vu en (3.2.3) et (3.2.4), est donnée par :

$$\mathbf{P}_x(T_U > t) \simeq \exp\left(-\frac{l}{R^2}t\right)$$

où R est la taille de la clairière. Ainsi, en prenant pour les (X_i) la valeur propre principale du laplacien pour chaque clairière, on tombe dans le cas (3.3.8) avec $\rho = 1/2$, et on peut vérifier que les résultats des deux parties précédentes coïncident. En dimension supérieure, les choses se compliquent, ni la forme des clairières, ni même leur délimitation, ne sont simples, et il faut utiliser la méthode de "coarse-graining" de Sznitman pour arriver au résultat du théorème 3.2.5.

3.5 Annexe : variation régulière

Pour plus de précisions, on pourra consulter le livre de N.H. Bingham, C.M. Goldie et J.L. Teugels [BGT].

Définition 3.5.1. Une fonction $l > 0$ définie sur un voisinage de $+\infty$ est dite à variation lente si :

$$\forall \lambda > 0 \quad \frac{l(\lambda x)}{l(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1 \quad (3.5.1)$$

Proposition 3.5.2. La convergence (3.5.1) est uniforme sur tout compact.

Théorème 3.5.3 (Représentation). l varie lentement si et seulement si l est de la forme :

$$l(x) = c(x) \exp \left(\int_a^x \epsilon(u) \frac{du}{u} \right)$$

avec $a > 0$, $c(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} c > 0$ et $\epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$.

Définition 3.5.4. Si dans la représentation précédente, on peut prendre $c(x)$ constant, on dit que l est à variation lente normale.

Remarque 3.5.5. Si l varie lentement, alors pour tout $\alpha > 0$ on a :

$$x^\alpha l(x) \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \frac{l(x)}{x^\alpha} \rightarrow +\infty$$

Proposition 3.5.6. l est à variation lente normale si et seulement si pour tout $\alpha > 0$ on a :

$$\begin{cases} x^\alpha l(x) \text{ est ultimement croissante} \\ x^{-\alpha} l(x) \text{ est ultimement décroissante} \end{cases}$$

Théorème 3.5.7. Soit f une fonction mesurable telle que :

$$\forall \lambda > 0 \quad \frac{f(\lambda x)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} g(\lambda) \quad (3.5.2)$$

Alors il existe $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $g(\lambda) = \lambda^\rho$. De plus, f s'écrit $f(x) = x^\rho l(x)$ avec l à variation lente, et la convergence (3.5.2) est uniforme sur tout compact.

On dit que f est à variation régulière de paramètre ρ . On note $f \in R_\rho$. f se représente comme suit :

$$f(x) = c(x) \exp \left(\int_a^x (\rho + \epsilon(u)) \frac{du}{u} \right) \quad (3.5.3)$$

Définition 3.5.8. Si dans l'équation précédente, on peut choisir $c(x)$ constant, alors on dira que f est à variation normale.

On a l'équivalent de la proposition 3.5.6, moyennant le centrage de α autour de ρ :

Proposition 3.5.9. *l est à variation normale d'indice ρ si et seulement si pour tout $\alpha > 0$ on a :*

$$\begin{cases} x^{\rho+\alpha}l(x) \text{ est ultimement croissante} \\ x^{\rho-\alpha}l(x) \text{ est ultimement décroissante} \end{cases}$$

Définition 3.5.10. *Pour une fonction f , on définit l'inverse généralisé de f par :*

$$f^{\leftarrow} := \inf\{y \in [0; +\infty) : f(y) > x\}$$

Proposition 3.5.11. *Si $f \in R_\alpha$ avec $\alpha > 0$, il existe $g \in R_{1/\alpha}$ tel que :*

$$f(g(x)) \sim g(f(x)) \sim x$$

De plus, une telle fonction g est unique à équivalence asymptotique près, et f^{\leftarrow} convient.

Théorème 3.5.12 (Kasahara). *Soit X une variable aléatoire dont les moments exponentiels sont finis : $M(\lambda) := \mathbb{E}[e^{\lambda X}] < \infty$. Soient $0 < \alpha < 1$, $\phi \in R_\alpha$, $\psi(\lambda) = \lambda/\phi(\lambda) \in R_{1-\alpha}$ et $B > 0$. On a l'équivalence suivante :*

$$\begin{aligned} -\log \mathbb{P}[X > x] &\sim B\phi^{\leftarrow}(x) \quad (x \rightarrow \infty) \\ \Leftrightarrow \log M(\lambda) &\sim (1-\alpha) \left(\frac{\alpha}{B}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} \psi^{\leftarrow}(\lambda) \quad (x \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Chapitre 4

Systèmes désordonnés, verres de spins et transitions de phase

4.1 L'origine physique du problème

Les problèmes auxquels nous allons nous intéresser tout au long de ce projet ont pour origine une structure particulière de la matière : le verre. Au contraire d'un solide cristallin dont toutes les molécules sont disposées régulièrement dans l'espace, un verre est un état figé où chaque particule voit un environnement très différent. On parle généralement de phase désordonnée ou amorphe, en anglais de *random solid state*. Cet état est généralement obtenu par une solidification brutale qui bloque les particules dans une position peu régulière. Si l'on insère dans un métal (argent, cuivre) quelques impuretés possédant un moment magnétique (le fer par exemple), les électrons de conduction induisent des interactions entre les spins qui sont de signe et d'intensité variables, apparemment aléatoires. On observe sur ces verres de spins des transitions de phase, qui peuvent notamment être mises en évidence expérimentalement par l'apparition de propriétés magnétiques avec la variation de température.

Le but de ce projet est de proposer des modèles mathématiques rendant compte de la structure des verres de spins. Nous effectuerons également des simulations informatiques mettant en évidence des transitions de phase. Par la suite, nous considérerons un système de N spins en interaction. Un état, ou une configuration du système sera décrit par $\sigma = (\sigma_i)_{i \in [1;N]}$, avec $\sigma_i \in \{-1; 1\}$. On notera $\Lambda_N = \{-1; 1\}^N$ l'ensemble des configurations possibles. On étudiera le système dans la limite $N \rightarrow +\infty$. Un changement de phase peut être observé par une rupture des propriétés du système, comme par exemple l'aimantation moyenne, comme nous allons le voir dans l'exemple suivant.

4.2 La transition de phase sur un modèle simple : le modèle de Curie-Weiss

4.2.1 Présentation du problème

Nous allons nous intéresser à un modèle simple présentant une transition de phase : le modèle de Curie-Weiss. On pose comme énergie d'interaction :

$$H_N(\sigma) = -\frac{1}{N} \sum_{i \neq j} \sigma_i \sigma_j$$

Chaque spin interagit avec l'ensemble des autres spins, et l'énergie étant à minimiser, la position la plus favorable est la position où tous les spins sont de même signe. Le facteur $1/N$ assure à l'énergie d'être un paramètre extensif. Chaque état a une probabilité d'être atteint pondéré par son niveau d'énergie. Plus précisément, elle est proportionnelle au facteur de Boltzmann $\exp(-\beta H_N(\sigma))$, où β est un paramètre positif. On peut introduire la mesure de probabilité de Gibbs sur l'ensemble des configurations de spins possibles. Elle est donnée par :

$$\mathcal{P}_N(\sigma) = \frac{1}{Z_N} \frac{1}{2^N} \exp(-\beta H_N(\sigma))$$

en posant $Z_N = \frac{1}{2^N} \sum_{\sigma \in \Lambda_N} \exp(-\beta H_N(\sigma))$, la fonction de partition du système. Physiquement, β représente l'inverse d'une température. Il y a concurrence entre l'effet des interactions inter-spins qui tend à concentrer la mesure de Gibbs sur quelques configurations, et l'agitation thermique qui tend au contraire à l'uniformiser sur toutes les configurations (si $\beta \rightarrow +\infty$, la mesure est concentrée sur les configurations d'énergie minimale ; au contraire, si $\beta \rightarrow 0$, toutes les configurations sont équiprobables). Nous allons observer une transition entre ces deux états. Pour ce faire, nous étudierons l'énergie libre du système :

$$f(\beta) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \ln(Z_N)$$

On notera

$$a_N \asymp b_N$$

si pour tout $\epsilon > 0$ on a pour tout N suffisamment grand :

$$e^{-\epsilon N} a_N \leq b_N \leq e^{\epsilon N} a_N$$

On peut vérifier que c'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites strictement positives équivalent à

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} (\ln(a_N) - \ln(b_N)) = 0$$

4.2.2 Résolution

On a la relation :

$$\left(\sum_i \sigma_i \right)^2 = 2 \sum_{i \leq j} \sigma_i \sigma_j + N$$

D'où, si $m_N(\sigma) = \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i$ désigne l'aimantation moyenne du système :

$$2H_N(\sigma) = -Nm_N(\sigma)^2 + 1$$

Par la suite, on abandonnera le décalage d'énergie constant introduit ici, qui n'a aucune conséquence sur les propriétés physiques du système. En notant P_0 la mesure de probabilité uniforme sur Λ_N , et E_0 l'espérance associée, il vient :

$$\begin{aligned} Z_N &= E_0 \left(\exp \left(\frac{\beta N}{2} m_N(\sigma)^2 \right) \right) \\ &= \sum_x \exp \left(\frac{\beta N}{2} x^2 \right) P_0(m_N(\sigma) = x) \end{aligned}$$

On peut expliciter $P_0(m_N(\sigma) = x)$: il vaut $C_N^{N(1+x)/2}$ si $N(1+x)$ est pair ; 0 sinon. En utilisant le développement asymptotique de factorielle, on aboutit à :

$$P_0(m_N(\sigma) = x) \asymp -N I(x)$$

avec

$$I(x) = \frac{1+x}{2} \ln(1+x) + \frac{1-x}{2} \ln(1-x)$$

D'où il vient :

$$Z_N \asymp \sum_x \exp N \left(\frac{\beta x^2}{2} - I(x) \right)$$

Et comme

$$\exp N \sup_x \left(\frac{\beta x^2}{2} - I(x) \right) \leq \sum_x \exp N \left(\frac{\beta x^2}{2} - I(x) \right) \leq N \exp N \sup_x \left(\frac{\beta x^2}{2} - I(x) \right)$$

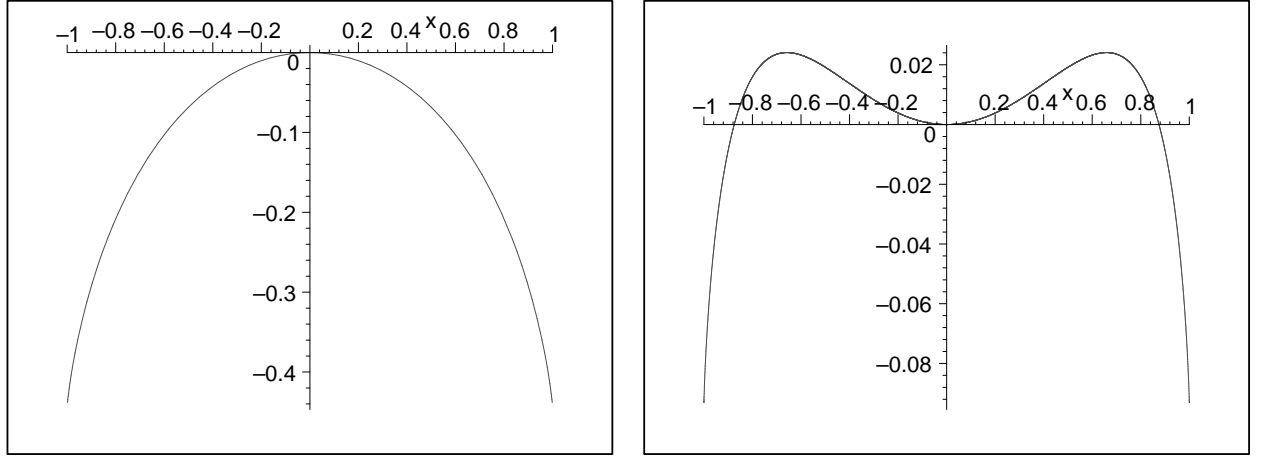
on a finalement :

$$Z_N \asymp \exp \left(N \sup_x \left(\frac{\beta x^2}{2} - I(x) \right) \right)$$

et

$$f(\beta) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \ln(Z_N) = \sup_{x \in [-1;1]} \left(\frac{\beta x^2}{2} - I(x) \right)$$

Pour en revenir au sens physique, $g_\beta : x \rightarrow \frac{\beta x^2}{2} - I(x)$ est une fonction de l'aimantation moyenne qui est à maximiser.

FIG. 4.1 – g_β dans les cas $\beta = 1/2$ et $\beta = 1 + 1/5$

Deux cas sont à distinguer quant à l'étude des maximums de cette fonction. On a en effet : $\beta \leq \beta_c = 1 \Leftrightarrow \sup g_\beta = f(\beta) = 0$.

Vue la symétrie du système, l'aimantation moyenne est toujours nulle. Mais pour $\beta > 1$, si l'on pose que le maximum de g_β est atteint en $\bar{m}(\beta) > 0$, l'espace se scinde en deux parties : l'une où $m_N(\sigma) \simeq \bar{m}(\beta)$, et l'autre où $m_N(\sigma) \simeq -\bar{m}(\beta)$. On a en effet pour tout $\epsilon > 0$:

$$\mathcal{P}(|m_N(\sigma) - \bar{m}(\beta)| > \epsilon) \asymp \frac{\exp\left(N \sup_{|x| - \bar{m}(\beta) > \epsilon} (g_\beta)\right)}{\exp\left(N \sup_x (g_\beta)\right)} \asymp \exp(-\alpha N)$$

Avec $\alpha > 0$ indépendant de N . Cette décroissance exponentielle assure le résultat suivant :

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{P}(|m_N(\sigma) - \bar{m}(\beta)| > \epsilon) = 0$$

L'étude de la dérivée de g_β donne directement :

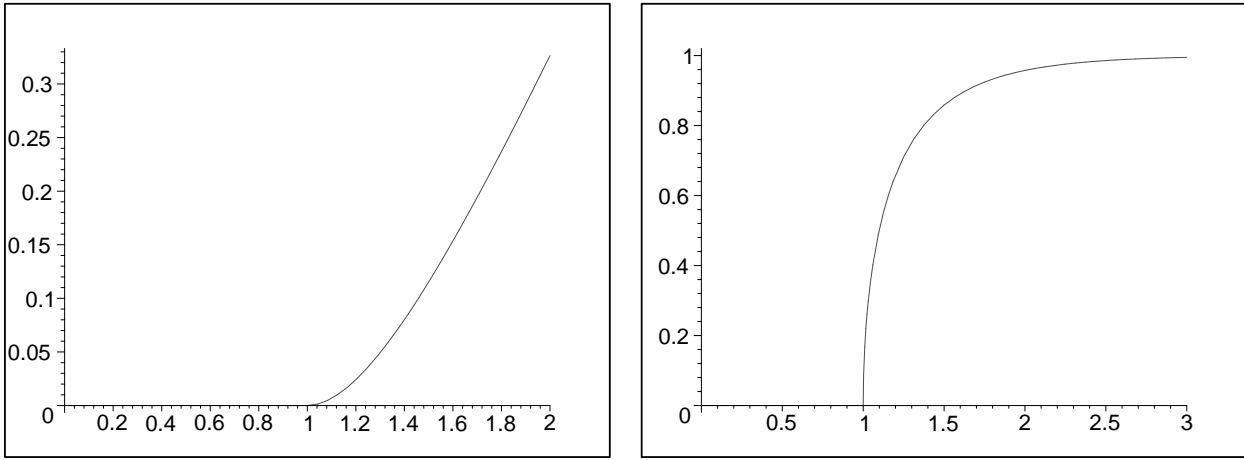
$$\bar{m}(\beta) = \tanh(\beta \bar{m}(\beta))$$

Cette équation permet de représenter l'évolution de l'énergie libre et de \bar{m} , ce qui met en évidence la transition de phase pour $\beta = \beta_c = 1$:

4.3 Le modèle à 3 spins

4.3.1 Présentation du modèle

On va maintenant s'intéresser à un modèle quelque peu différent, où les interactions mettront en jeu non plus deux mais trois spins. L'énergie à minimiser prend la forme suivante :

FIG. 4.2 – Energie libre f et \bar{m} en fonction de β

$$H_N(\sigma) = - \sum_{i=1}^M J_m \sigma_{i_m} \sigma_{j_m} \sigma_{k_m}$$

où les J_m et les (i_m, j_m, k_m) sont des variables aléatoires uniformément distribuées respectivement dans $\{-1; 1\}$ et dans l'ensemble des triplets de $[1; N]$. On notera $\alpha = M/N$ le nombre de contraintes par spin, que nous garderons indépendant de N .

Nous allons particulièrement nous intéresser à l'existence des états fondamentaux, c'est à dire aux configurations σ pour lesquelles $H_N(\sigma) = -M$. Cela revient à étudier le problème de physique statistique associé à température nulle ($\beta \rightarrow +\infty$), ce qui peut sembler restrictif. Mais le paramètre α autorise une étude similaire, puisque l'augmentation du nombre de contraintes peut être rapprochée d'une diminution de température dans le modèle précédent. Nous verrons de plus comment ce paramètre permet une approche algorithmique très naturelle.

4.3.2 Approche algorithmique

On peut établir un parallèle entre les approches de la physique statistique et de l'algorithmique.

Physique statistique	Algorithmique
Spin σ_i	Inconnue X_i à valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
membre de $H(\sigma) : J_m \sigma_{i_m} \sigma_{j_m} \sigma_{k_m}$	équation $(E_m) : X_{i_m} + X_{j_m} + X_{k_m} = \delta_m$
Energie $H(\sigma)$ à minimiser	Système d'équations (E_m) à résoudre
Etat fondamental	Solution du système

Ainsi, l'éventuelle existence d'un état fondamental peut être vue comme

la solution d'un système de M équations faisant intervenir N variables à valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ce problème est connu en informatique sous le nom 3-XORSAT (Le but étant de décider de la SATisfiabilité d'un ensemble de clauses reliant 3 variables booléennes par des "XOR", des ou exclusif). Il semble naturel de penser que le problème admettra des solutions si α est petit (problème sous-contraint), et en aura d'autant moins que α sera grand (problème sur-contraint).

Dans le but de mettre en évidence le phénomène de transition de phase, j'ai rédigé un algorithme en CAML qui décide de la satisfiabilité d'un système d'équations donné. L'algorithme procède tout d'abord à la simplification du système d'équations selon un graphe où chaque point est une inconnue et chaque équation un triangle joignant trois points du graphe. Il est évident que l'on peut d'emblée supprimer les points d'où ne partent aucune branche : ce sont les inconnues qui n'apparaissent dans aucune équation.

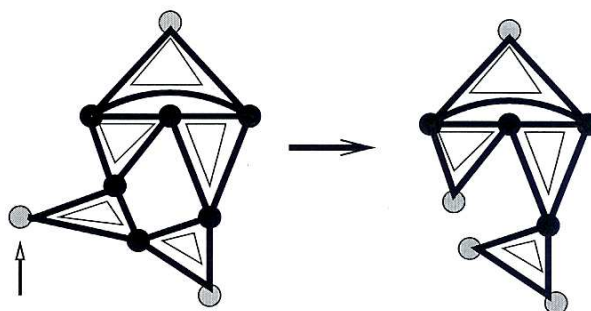


FIG. 4.3 – Processus de décimation du système. En continuant la méthode, on peut vérifier que ce système admet une solution.

Considérons maintenant une inconnue qui n'apparaîtrait que dans une seule équation. Si le reste du système a une solution, il suffit d'attribuer à l'inconnue restante la valeur fixée par l'unique équation en jeu pour en déduire une solution du système global. On peut donc simplifier le système en enlevant l'inconnue et l'équation dont il est question. Cette simplification se poursuit jusqu'à obtenir soit un système vide (auquel cas on aura montré que le système admet une solution), soit à un système trop "imbriqué" pour pouvoir être simplifié davantage.

Pour conclure sur la satisfiabilité du système simplifié, on parcourt alors un arbre binaire où chaque profondeur représente une inconnue et chaque branche une valeur possible pour l'inconnue (0 ou 1). A chaque nœud, on vérifie que les valeurs assignées aux premières inconnues ne sont pas en contradiction avec le système d'équations. Les inconnues sont classées par nombre d'apparitions dans les équations décroissant. Ainsi, les premières variables sont très contraintes et empêchent un parcours de l'arbre trop

important. Par exemple, dans le cas de 50 inconnues, il y a un arbre potentiel de 2^{50} nœuds, mais les parcours les plus longs ne font jamais intervenir plus de 14 000 nœuds.

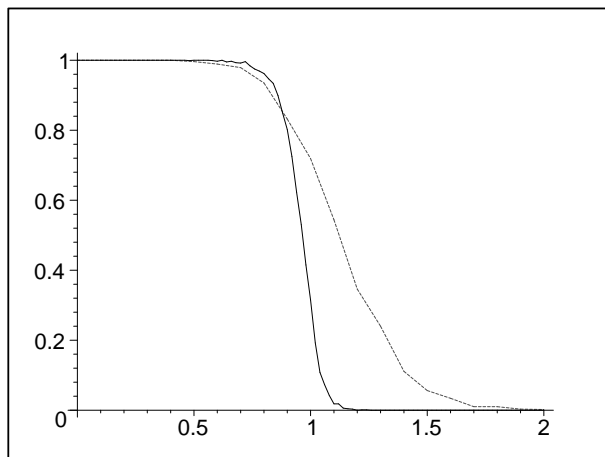


FIG. 4.4 – Probabilité de satisfiabilité du système en fonction de α pour $N = 10$ en pointillés et $N = 50$ en trait plein

On observe que le passage du problème sous-contraint au problème sur-contraint est de plus en plus marqué quand le nombre d'inconnues N augmente. A la limite, on peut penser que la courbe présente un saut brutal : il existerait une valeur critique α_c telle que pour $\alpha < \alpha_c$, le système est satisfiable avec une probabilité 1, et pour $\alpha > \alpha_c$, il ne l'est pas avec une probabilité 1. La conséquence physique de cette transition de phase serait l'existence d'un seuil α_c au-delà duquel l'énergie de l'état fondamental cesserait d'être nulle. Le tracé des accroissements des courbes obtenues par les simulations laisse penser que α_c serait de l'ordre de 0,95.

Un autre paramètre intéressant en informatique est la complexité. Ici on considère le nombre de nœuds de l'arbre de recherche parcourus. On observe une augmentation brutale de la complexité au voisinage de la transition.

4.3.3 Point de vue théorique

La question de la transition de phase a été résolue il y a moins d'un an [DM02] et est trop complexe pour être complètement décrite ici. L'enjeu de cette partie est de décrire la méthode utilisée, sans entrer dans le détail des calculs.

On peut dans un premier temps montrer que pour $\alpha > 1$, le système n'a presque sûrement pas de solution. En effet, soit A le nombre de solutions d'un système d'équations choisi aléatoirement. On a :

$$\mathcal{P}(A \geq 1) \leq \mathbf{E}(A)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(A) &= \mathbf{E} \left[\sum_{(X_i) \in \{0,1\}^N} \prod_m 1_{X_{i_m} + X_{j_m} + X_{k_m} = \delta_m} \right] \\ &= \sum_{(X_i) \in \{0,1\}^N} \mathbf{E} \left[\prod_m 1_{X_{i_m} + X_{j_m} + X_{k_m} = \delta_m} \right] \end{aligned}$$

Comme il s'agit de l'espérance d'un produit de variables indépendantes, il vient :

$$\mathcal{P}(A \geq 1) \leq 2^{N-M}$$

qui tend vers 0 dès que $\alpha > 1$.

On peut se demander si 1 est la bonne valeur pour α_c . Les simulations numériques tendent à donner une valeur légèrement inférieure. Pour conclure sur la transition de phase, il reste à trouver l'inégalité inverse (celle du cas sous-contraint). L'idée est d'utiliser la méthode dite du second moment, basée sur l'inégalité suivante :

$$\mathcal{P}(A \geq 1) \geq \frac{\mathbf{E}[A]^2}{\mathbf{E}[A^2]}$$

(c'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à A et $1_{A \geq 1}$). On peut alors montrer qu'il existe α_1 tel que pour $\alpha < \alpha_1$, $\mathcal{P}(A \geq 1)$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini. Cela résout une partie du problème en désignant une zone où le système est sous-contraint, mais ce n'est pas suffisant car $\alpha_1 < 1$, et l'intervalle $[\alpha_1; 1]$ reste indéterminé. (en pratique, α_1 est de l'ordre de 0,88).

Pour montrer le résultat pressenti par les simulations, il faut donc utiliser une autre technique. L'idée de départ vient précisément de la décimation utilisée dans l'algorithme. Pour un système d'équations de départ donné ω pris dans l'ensemble des systèmes possibles $\Omega_{N,M}$, on associe son simplifié ω' dans l'ensemble $\Psi_{N',M'}$ des systèmes non simplifiables de N' équations à M' inconnues.

On voit tout d'abord que le premier argument utilisé dans le paragraphe est toujours valable : si α' désigne le rapport M'/N' , $\mathcal{P}(A \geq 1) = \mathcal{P}(A' \geq 1)$ tend vers 0 quand $\alpha' > 1$. Tout l'intérêt de cette situation est que la méthode du second moment donne également un α' critique de 1 ! On peut alors remonter à la valeur du α_c initial et trouver $\alpha_c \simeq 0,918^1$.

On peut comprendre *a priori* l'efficacité de la décimation pour la méthode du second moment. En effet, il s'agit d'obtenir $\mathbf{E}[A]^2 \simeq \mathbf{E}[A^2]$. Le problème est donc de minimiser les systèmes où le nombre de solutions est important. C'est précisément ce que fait la décimation, en proposant un système simplifié équivalent beaucoup plus contraint, dénué notamment d'inconnues n'apparaissant dans aucune équation.

¹ $\alpha_c = \frac{\lambda}{3(1-e^{-\lambda})^2}$, où λ est la racine positive de l'équation $(x-3)e^x + 2x + 3 = 0$

4.4 La méthode du second moment

4.4.1 Le modèle de Sherrington-Kirkpatrick

Nous allons utiliser la technique du second moment sur un autre modèle de verre de spins présentant une transition de phase : le modèle de Sherrington-Kirkpatrick [BS]. A l'image de la démarche suivie dans le modèle de Curie-Weiss, nous allons chercher à calculer l'énergie libre du système. Les interactions entre spins vont cette fois être pondérées par des variables aléatoires $(J_{i,j})_{1 \leq i < j \leq N}$ i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ (gaussienne centrée d'écart-type 1) définies sur l'espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Physiquement, on peut penser que ce modèle rend mieux compte du caractère aléatoire des interactions que le modèle de Curie-Weiss, mais les calculs deviennent de ce fait plus délicats. On a :

$$H_N(\sigma) = -\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{1 \leq i < j \leq N} J_{i,j} \sigma_i \sigma_j$$

L'énergie libre prend la forme suivante (sous réserve d'existence) :

$$f(\beta) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \mathbf{E} \ln(Z_N)$$

En utilisant l'inégalité de Jensen, on a la relation :

$$\frac{1}{N} \mathbf{E} \ln(Z_N) \leq \frac{1}{N} \ln \mathbf{E}(Z_N) = \frac{1}{N} \ln E_0 \exp \left(\frac{\beta^2}{2N} \sum_{1 \leq i < j \leq N} 1 \right) \rightarrow \frac{\beta^2}{4} \quad (4.4.1)$$

Pour $\beta < \beta_c = 1$, on peut utiliser la technique du second moment pour calculer l'énergie libre. Cela consiste à montrer que $\mathbf{E} [(Z_N)^2] \simeq (\mathbf{E} [Z_N])^2$. On a d'une part :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Z_N] &= \mathbf{E} \left[E_0 \exp \frac{\beta}{\sqrt{N}} \sum_{1 \leq i < j \leq N} J_{i,j} \sigma_i \sigma_j \right] \\ &= E_0 \left[\exp \left(\frac{\beta^2}{2N} \sum_{1 \leq i < j \leq N} (\sigma_i \sigma_j)^2 \right) \right] \\ &= \exp \left(\frac{\beta^2(N-1)}{4} \right) \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\mathbf{E} [(Z_N)^2] = \mathbf{E} \left[\left(E_0 \exp \frac{\beta}{\sqrt{N}} \sum_{1 \leq i < j \leq N} J_{i,j} \sigma_i \sigma_j \right)^2 \right]$$

En introduisant (σ'_i) indépendant de (σ_i) et de même loi, on a :

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{E} \left[E_0^{(2)} \left(\exp \frac{\beta}{\sqrt{N}} \sum_{1 \leq i < j \leq N} J_{i,j} (\sigma_i \sigma_j + \sigma'_i \sigma'_j) \right) \right] \\
&= E_0^{(2)} \left[\exp \left(\frac{\beta^2}{2N} \sum_{1 \leq i < j \leq N} (\sigma_i \sigma_j + \sigma'_i \sigma'_j)^2 \right) \right] \\
&= \mathbf{E}[Z_N]^2 E_0^{(2)} \left[\exp \left(\frac{\beta^2}{N} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \sigma_i \sigma_j \sigma'_i \sigma'_j \right) \right]
\end{aligned}$$

On a de plus :

$$\begin{aligned}
E_0^{(2)} \left[\exp \left(\frac{\beta^2}{N} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \sigma_i \sigma_j \sigma'_i \sigma'_j \right) \right] &= E_0 \left[\exp \left(\frac{\beta^2}{N} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \sigma_i \sigma_j \right) \right] \\
&= \exp \left(-\frac{\beta^2}{2} \right) E_0 \left[\exp \left(\frac{\beta^2 N}{2} m_N^2 \right) \right]
\end{aligned}$$

en posant comme précédemment $m_N = \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i$. On va maintenant majorer l'espérance de droite. En introduisant J variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, il vient :

$$\begin{aligned}
E_0 \left[\exp \left(\frac{\beta^2 N}{2} m_N^2 \right) \right] &= E_0 \mathbf{E} \exp(\beta \sqrt{N} m_N J) \\
&= \mathbf{E} E_0 \exp(\beta \sqrt{N} m_N J) = \mathbf{E} \prod_i E_0 \exp \left(\frac{\beta J}{\sqrt{N}} \sigma_i \right) \\
&= \mathbf{E} \left[\cosh^N \left(\frac{\beta J}{\sqrt{N}} \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) \exp \left(N \ln \cosh \left(\frac{\beta x}{\sqrt{N}} \right) \right) dx
\end{aligned}$$

Comme de plus $\ln \cosh(x) \leq x^2/2$, on a pour $\beta < 1$:

$$E_0 \left[\exp \left(\frac{\beta^2 N}{2} m_N^2 \right) \right] \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp \left(-\frac{x^2}{2} (1 - \beta^2) \right) dx = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

On a donc montré que pour $\beta < 1$; il existe une constante $c(\beta)$ indépendante de N telle que :

$$\mathbf{E} \left[(Z_N)^2 \right] \leq c(\beta) (\mathbf{E} [Z_N])^2$$

On montre (pour une démonstration de cette propriété, on pourra consulter [BS]) pour tout $t > 0$ la propriété de concentration suivante :

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{N} \ln Z_N - \frac{1}{N} \mathbf{E} \ln Z_N \right| \geq \frac{t}{\sqrt{N}} \right) \leq \exp \left(-\frac{t^2}{2\beta^2} \right)$$

En posant $A_N = \{Z_N \geq \mathbf{E}Z_N/2\}$, on a :

$$\mathbf{E}Z_N = \mathbf{E}(Z_N \mathbf{1}_{A_N^c}) + \mathbf{E}(Z_N \mathbf{1}_{A_N}) \leq \mathbf{E}Z_N/2 + \sqrt{\mathbf{E}[Z_N^2] \mathbb{P}(A_N)}$$

et il vient :

$$\mathbb{P}(A_N) \geq \frac{(\mathbf{E}[Z_N])^2}{4\mathbf{E}[Z_N^2]} \geq \frac{1}{4c(\beta)}$$

constante strictement positive indépendante de N . Finalement, en choisissant t suffisamment grand :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \mathbf{E}[\ln Z_N] &\geq \frac{1}{N} \ln \left(\frac{\mathbf{E}Z_N}{2} \right) - O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \\ &= \frac{1}{N} \ln \mathbf{E}Z_N - O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) = \frac{\beta^2}{4} - O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

On peut donc conclure, à l'aide de l'inégalité (4.4.1), que $f(\beta)$ existe pour tout $\beta < 1$ et vaut :

$$f(\beta) = \frac{\beta^2}{4}$$

La transition de phase, marquée par une rupture de la pente de l'énergie libre par analogie avec le modèle de Curie-Weiss, n'a donc pas lieu pour $\beta < 1$. On a vu comment la méthode du second moment nous a permis d'accéder à l'énergie libre du système.

4.4.2 Le Random Energy Model

Le REM (Random Energy Model) utilise une approche différente. Dans les modèles précédents, les énergies de toutes les configurations possibles formaient une famille de variables aléatoires non indépendantes. L'idée de Bernard Derrida, rencontré au cours de ce projet, est de prendre une famille de 2^N variables aléatoires gaussiennes indépendantes (H_i) qui représentent les niveaux d'énergies des configurations possibles. Elles seront choisies de variance N .

Nous allons une nouvelle fois étudier l'énergie libre, et observer une transition de phase. Pour cela, on va tenter d'utiliser la méthode du second moment. $\mathbf{E}[Z_N]$ se calcule simplement :

$$\mathbf{E}[Z_N] = \mathbf{E} \left[\frac{1}{2^N} \sum_i \exp(-\beta H_i) \right] = \exp\left(\frac{N\beta^2}{2}\right)$$

Pour calculer $\mathbf{E}[Z_N^2]$, on va justement utiliser l'indépendance des (H_i) deux à deux :

$$\mathbf{E}[Z_N^2] = \frac{1}{2^{2N}} \mathbf{E} \left[\sum_{i,j} \exp(-\beta(H_i + H'_j)) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{2N}} \left[\sum_i \exp(2\beta^2 N) + \sum_{i \neq j} \exp(\beta^2 N) \right] \\
&= \exp[N(2\beta^2 - \ln(2))] + (1 - 1/2^N) \underbrace{\exp(\beta^2 N)}_{= \mathbf{E}[Z_N]^2}
\end{aligned}$$

On voit d'une part que $\mathbf{E}[Z_N^2]/\mathbf{E}[Z_N]^2$ est borné quand N varie tant que $\beta \leq \sqrt{\ln(2)}$, et diverge vers $+\infty$ sinon. La méthode du second moment ne permet pas d'accéder à l'énergie libre pour tout β . Physiquement, les états rares mais de très haute énergie prennent une importance trop grande dans le calcul de $\mathbf{E}[Z_N^2]$. Il faut donc utiliser une autre méthode qui coupe les énergies trop importantes.

On peut tout d'abord remarquer que la fonction : $\beta \rightarrow \frac{1}{N} \ln(Z_N(\beta))$ est convexe. En effet, si f est une fonction positive sur un espace mesuré, $\beta \rightarrow \ln(\int f^\beta d\mu)$ est convexe d'après l'inégalité de Hölder.

L'inégalité de Jensen donne :

$$p_N(\beta) = \frac{1}{N} \mathbf{E}[\ln(Z_N)] \leq \frac{1}{N} \ln \mathbf{E}[Z_N] = \frac{\beta^2}{2}$$

D'autre part, on a :

$$Z_N \geq \frac{1}{2^N} \exp(\beta \max_i (H_i))$$

et par conséquent :

$$p_N(\beta) \geq \frac{\beta}{N} \mathbf{E}[\max_i (H_i)] - \ln(2)$$

En utilisant l'inégalité précédente pour $p_N(\sqrt{2\ln(2)})$, il vient :

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2\ln(2)}}{N} \mathbf{E}[\max_i (H_i)] - \ln(2) &\leq \ln(2) \\
\frac{1}{N} \mathbf{E}[\max_i (H_i)] &\leq \sqrt{2\ln(2)}
\end{aligned}$$

On a de plus :

$$\frac{d}{d\beta} p_N(\beta) \leq \frac{1}{N} \mathbf{E}[\max_i (H_i)] \leq \sqrt{2\ln(2)}$$

En utilisant l'inégalité précédente, on a pour tout $\beta \geq \sqrt{2\ln(2)}$:

$$p_N(\beta) \leq \sqrt{2\ln(2)}\beta - \ln(2)$$

Montrons la propriété suivante :

$$\begin{aligned}
\lim p_N(\beta) &= \beta^2/2 \quad , \beta \leq \sqrt{2\ln(2)} \\
\lim p_N(\beta) &= \sqrt{2\ln(2)}\beta - \ln(2) \quad , \beta \geq \sqrt{2\ln(2)}
\end{aligned} \tag{4.4.3}$$

Si la première égalité est vérifiée, la convexité de p_N et l'inégalité précédente suffisent à montrer le deuxième résultat.

Nous allons appliquer la méthode du second moment à une variable aléatoire auxiliaire A_N définie par :

$$A_N = |\{i : -H_i \geq \beta N\}|$$

Posons $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$. On a :

$$\mathbf{E}[A_N] = 2^N \Phi(\beta\sqrt{N})$$

A_N^2 peut être écrit sous la forme

$$A_N^2 = \sum_{i,j} 1_{\{-H_i \geq \beta N, H_j \geq \beta N\}}$$

D'où :

$$\mathbf{E}[A_N^2] \leq 2^N \Phi(\beta\sqrt{N}) + 2^{2N} \Phi(\beta\sqrt{N})^2 = \mathbf{E}[A_N] + \mathbf{E}[A_N]^2$$

On peut montrer qu'il existe une constante L telle que pour tout $t > 0$:

$$\frac{1}{L(1+t)} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \leq \Phi(t) \leq \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

D'où il vient :

$$\mathbf{E}[A_N] \geq \frac{2^N}{L(1+\beta\sqrt{N})} \exp\left(-\frac{\beta^2 N}{2}\right)$$

quantité supérieure à 1 pour $\beta < \sqrt{2 \ln(2)}$ et N suffisamment grand. De plus :

$$\mathcal{P}(A_N \geq \mathbf{E}[A_N]/2) \geq \frac{\mathbf{E}[A_N]^2}{4\mathbf{E}[A_N^2]} \geq \frac{1}{4\left(\frac{1}{\mathbf{E}[A_N]} + 1\right)} \geq \frac{1}{8}$$

Comme

$$Z_N \geq \frac{1}{2^N} \exp(\beta^2 N) A_N$$

il vient :

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{N} \ln(Z_N) \geq \frac{\beta^2}{2} - \frac{1}{N} \ln(LN)\right) \geq \frac{1}{8}$$

On peut alors comme dans le modèle de Sherrington-Kirkpatrick utiliser une propriété de concentration des variables gaussiennes :

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{N} \ln(Z_N) \leq p_N(\beta) + \frac{K}{\sqrt{N}}\right) > 7/8$$

(où K est une constante) et par conséquent :

$$p_N(\beta) \geq \frac{\beta^2}{2} - \frac{1}{N} \ln(LN) - \frac{K}{\sqrt{N}}$$

ce qui finit la démonstration.

4.5 Conclusion

Le problème physique qui nous a été posé, celui des verres de spins et des transitions de phase, nous a conduit à élaborer différents modèles. Celui de Curie-Weiss, très simple, rend bien compte des propriétés observées. Nous nous sommes ensuite intéressés au modèle à trois spins à température nulle, qui introduit une correspondance entre les approches de la physique statistique et de l'algorithmique et présente également une transition de phase. Les modèles considérés par la suite rendent compte de la méthode utilisée dans l'étude du modèle à trois spins, et notamment de la méthode du second moment. Cette dernière doit son efficacité à l'absence d'événements (qui peuvent être rares) pour lesquels la valeur de la variable aléatoire est trop importante, comme on le voit dans le nécessaire changement de variable aléatoire dans le REM. On comprend en particulier pourquoi la décimation, inspirée de l'algorithme de résolution du problème 3-XORSAT, est indispensable pour la résolution du modèle.

Remerciements

Un grand merci à Thierry Bodineau, qui m'a guidé tout au long de ce projet. Merci aussi à Bernard Derrida, professeur à l'ENS, qui a accepté de me rencontrer pour parler du Random Energy Model, dont il est l'initiateur.

Bibliographie

- [An95] P. Antal. Enlargement of obstacles for the simple random walk, *Annals of Probability* **23** 1061-1101 (1995).
- [BBM05] G. Ben Arous, L. Bogachev et S. Molchanov, Limit theorems for sums of random exponentials, *Probab. Theory Relat. Fields*, **132** (4), 579-612 (2005).
- [BČ06] G. Ben Arous et J. Černý. Dynamics of trap models. A paraître dans *Les Houches summer school lecture notes*, Elsevier (2006).
- [BMR05] G. Ben Arous, S. Molchanov et A.F. Ramírez. Transition from the annealed to the quenched asymptotics for a random walk on random obstacles, *Annals of Probability*. **33** (6), 2149-2187 (2005).
- [BMR06] G. Ben Arous, S. Molchanov et A.F. Ramírez. Phase transition asymptotics for random walks on a stationary random potential. *A paraître*.
- [BR00] G. Ben Arous et A.F. Ramírez. Asymptotic survival probabilities in the random saturation process, *Annals of Probability* **28** (4), 1470-1527.
- [BF05] A. Bovier et A. Faggionato. Spectral characterisation of aging : the REM-like trap model. *Ann. Appl. Probab.* **15** (3), 1997-2037 (2005).
- [BF06] A. Bovier et A. Faggionato. Spectral analysis of Sinai's walk for small eigenvalues. *WIAS Preprint 1047*.
- [CarMol] R. Carmona et S. Molchanov. *Parabolic Anderson model and intermittency*, Memoirs of AMS (1994).
- [BGT] N.H. Bingham, C.M. Goldie et J.L. Teugels, *Regular variation*, Cambridge University Press (1987).
- [DV79] M. Donsker et S.R.S. Varadhan. On the number of distinct sites visited by a random walk, *Comm. Pure Appl. Math.* **32** 721-747 (1979).
- [GM90] J. Gärtner et S. Molchanov. Parabolic problems for the Anderson Model I. (intermittency and related topics), *Commun. Math. Phys.* **132** 613-655 (1990).
- [Petrov] V.V. Petrov, *Sums of independant random variables*, Springer, Berlin (1975).

- [PY97] J. Pitman et M. Yor. The two-parameter Poisson-Dirichlet distribution derived from a stable subordinator. *Annals of Probability* **25** (2) 855-900 (1997).
- [Sznit] A.S. Sznitman. *Brownian motion, obstacles and random media*, Springer-Verlag, Berlin (1998).
- [vBE65] B. von Bahr et C.G. Esseen. Inequalities for the r th absolute moment of a sum of random variables, $1 \leq r \leq 2$, *Ann. Math. Statist.* **36**, 299-303 (1965).
- [Wk] Collectif. Trempe, *Wikipédia, l'encyclopédie libre*, 24 mai 2006 (fr. wikipedia.org/wiki/Trempe).
- [BS] Erwin Bolthausen et Alain-Sol Sznitman. *Ten Lectures on Random Media*, Birkhäuser (2002).
- [DM02] O. Dubois et J. Mandler. The 3-XORSAT threshold, *43rd IEEE Symp. on foundations of Comp. Sc.*, 769-778 (2002).