Examen de Géométrie Algébrique Réelle – à rendre le 28/04/2020

Exercice 1. Soit $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et soit A un groupe muni d'une action de G, d'élément neutre e. On note $Z^1(G, A)$ l'ensemble des $a \in A$ tels que $a.\sigma(a) = e$.

1. Soient $a, a' \in Z^1(G, A)$. On dit que a et a' sont cohomologues s'il existe un élément $b \in A$ tel que $a' = b^{-1}.a.\sigma(b)$. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. On note $H^1(G, A)$ l'ensemble des classes d'équivalences.

2. Si A est abélien, montrer que l'on peut munir $H^1(G, A)$ d'une structure de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel.

3. Soit X une variété algébrique projective lisse réelle. On note $\mathrm{Aut}(X_{\mathbb{C}})$ le groupe des automorphismes de la variété algébrique complexe $X_{\mathbb{C}}$. Munir $\mathrm{Aut}(X_{\mathbb{C}})$ d'une action naturelle de G.

4. Construire une bijection naturelle entre l'ensemble des classes d'équivalence de formes réelles de $X_{\mathbb{C}}$ et l'ensemble $H^1(G, \mathrm{Aut}(X_{\mathbb{C}}))$.

5. En déduire que si Y est une variété algébrique projective lisse complexe telle que $\mathrm{Aut}(Y)$ est abélien, alors le nombre de classes d'équivalence de formes réelles de Y est 0, une puissance de 2, ou infini.

6. Soit $n \geq 1$. Soit Y la variété algébrique projective lisse complexe définie dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ par l'annulation du polynôme homogène $\prod_{k=1}^{n}(X_1 - kX_0)$. Quel est le groupe $\mathrm{Aut}(Y)$? Combien Y a-t-elle de classes d'équivalence de formes réelles ?

Exercice 2. Soit X une variété algébrique réelle projective lisse telle que $Y = X_{\mathbb{C}}$ est Zariski-connexe.

1. Montrer que la variété analytique complexe $Y(\mathbb{C})$ est connexe.

2. Soit $Z \subset Y$ une sous-variété algébrique fermée (c'est-à-dire un fermé de Zariski). Montrer que $Z(\mathbb{C}) \subset Y(\mathbb{C})$ est fermé.

3. Montrer que pour tout $z \in Z(\mathbb{C})$, il existe un voisinage V de z dans $Y(\mathbb{C})$ tel que $Z(\mathbb{C}) \cap V$ est le lieu des zéros dans V d'une famille de fonctions holomorphes $V \to \mathbb{C}$.

4. Soit U un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe nulle sur $U \cap \mathbb{R}^n$. Montrer que f est nulle au voisinage de l'origine.

5. Montrer que si $X(\mathbb{R})$ est non vide, alors $X(\mathbb{R})$ est Zariski-dense dans Y.

6. Montrer que $X(\mathbb{R})$ peut être non vide sans être Zariski-dense dans Y si on ne suppose pas Y Zariski-connexe.

7. Montrer que $X(\mathbb{R})$ peut être non vide sans être Zariski-dense dans Y si on ne suppose pas X lisse.

Exercice 3. Soient $M, N \geq 1$.

1. Montrer que l'*application de Segre* $\Sigma : \mathbb{P}^M(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^{MN+M+N}(\mathbb{C})$ définie par

$$([X_0 : \ldots : X_M], [Y_0 : \ldots : Y_N]) \mapsto [X_iY_j]_{0 \leq i \leq M, 0 \leq j \leq N}$$

   est bijective sur son image, et que son image est Zariski-fermée dans $\mathbb{P}^{MN+M+N}(\mathbb{C})$.

2. Soient $V \subset \mathbb{P}^M(\mathbb{C})$ et $W \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ des variétés algébriques complexes quasi-projectives. Montrer que $\Sigma(V \times W) \subset \mathbb{P}^{MN+M+N}(\mathbb{C})$ est une variété algébrique complexe quasi-projective.

3. Construire des morphismes $p_1 : \Sigma(V \times W) \to V$ $p_2 : \Sigma(V \times W) \to W$, et montrer qu'ils induisent des bijections
$$\mathrm{Hom}(U, \Sigma(V \times W)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(U, V) \times \mathrm{Hom}(U, W)$$
pour toute variété algébrique complexe quasi-projective U, où Hom désigne l'ensemble des morphismes entre deux variétés algébriques.

4. En déduire que la variété $\Sigma(V \times W)$ ne dépend que de V et de W (et pas des plongements $V \subset \mathbb{P}^M(\mathbb{C})$ et $W \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$). On note cette variété $V \times W$: c'est la *variété produit* de V et W.

5. Attention : la topologie de Zariski sur $V \times W$ n'est pas en général le produit des topologies de Zariski sur V et W ! Le montrer par un exemple.

6. Montrer que si V et W sont des variétés affines, alors $V \times W$ est une variété affine.

7. Soit Z une variété algébrique complexe quasi-projective. Montrer que l'application *diagonale* $\Delta : Z \to Z \to Z \times Z$ définie par $\Delta(z) = (z, z)$ réalise un isomorphisme entre Z et un fermé de Zariski de $Z \times Z$.

8. Soit Z une variété algébrique complexe quasi-projective et soient V et W deux ouverts affines de Z. Déduire des assertions précédentes que $V \cap W$ est un ouvert affine de Z.

Exercice 4. Soit $f : B \to C$ un morphisme entre courbes projectives lisses réelles, avec $C(\mathbb{C})$ connexe.

1. Montrer qu'il existe un ensemble fini $F \subset C(\mathbb{C})$ telle que l'application $B(\mathbb{C}) \setminus f^{-1}(F) \to C(\mathbb{C}) \setminus F$ induite par f est un difféomorphisme local et un revêtement topologique à fibres finies.

2. Soient $x, y \in C(\mathbb{R}) \setminus (F \cap C(\mathbb{R}))$. Montrer que les cardinaux des ensembles $f^{-1}(x) \cap B(\mathbb{R})$ et $f^{-1}(y) \cap B(\mathbb{R})$ ont même parité.

3. Montrer par un exemple que $f^{-1}(x) \cap B(\mathbb{R})$ et $f^{-1}(y) \cap B(\mathbb{R})$ peuvent avoir des cardinaux différents.

Soit maintenant C une courbe projective lisse réelle telle que $C(\mathbb{C})$ est connexe et $C(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes. On note S la variété algébrique réelle projective lisse $C \times \mathbb{P}^1$ (au besoin, pour une définition du produit de variétés réelles, voir l'exercice 4, dans lequel on remplace partout *complexe* par *réel*). Notons $H = K \times [0 : 1]$ où K est l'une des composantes connexes de $C(\mathbb{R})$: c'est une hypersurface $\mathcal{C}^\infty$ de $S(\mathbb{R})$.

4. Montrer qu'il n'y a pas de courbe réelle projective lisse $B \subset S$ telle que $[B(\mathbb{R})] = [H] \in H^1(S(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

5. En déduire qu'il existe un voisinage $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}^1(H, S(\mathbb{R}))$ de l'inclusion $H \subset S(\mathbb{R})$ tel que pour tout $\phi \in \mathcal{U}$, l'ensemble $\phi(H)$ n'est pas le lieu réel d'une courbe réelle projective lisse $B \subset S$.

Exercice 5. Soit X une variété algébrique réelle projective telle que $X(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{S}^3$ (par exemple la variété $X \subset \mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ d'équation $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = X_0^2$). Soit $i : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow X(\mathbb{R})$ une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ (un *nœud*).

1. Montrer que tout fibré vectoriel $\mathcal{C}^\infty$ de rang ≥ 2 sur $\mathbb{S}^1$ admet une section $\mathcal{C}^\infty$ nulle part nulle.

2. En déduire que deux fibrés vectoriels $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{S}^1$ qui ont même rang et même fibré en droites déterminant sont isomorphes.

3. Montrer que $N_{i(\mathbb{S}^1)/X(\mathbb{R})}$ est trivial.

4. Montrer qu'il existe un voisinage U de $i(\mathbb{S}^1)$ dans $X(\mathbb{R})$ tel que $i(\mathbb{S}^1)$ est le lieu des zéros dans U d'une section transverse à la section nulle du fibré vectoriel trivial $\mathbb{R}^2 \times U$.

5. Montrer que $i(\mathbb{S}^1)$ est le lieu des zéros dans dans $X(\mathbb{R})$ d'une section transverse à la section nulle d'un fibré vectoriel $\mathcal{C}^\infty$ de rang 2 sur $\mathbb{S}^3$.

6. Montrer que tout fibré vectoriel de rang 2 sur $X(\mathbb{R})$ est trivial.

7. Montrer que tout voisinage $\mathcal{U}$ de i dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{S}^1, X(\mathbb{R}))$ contient une application $\phi : \mathbb{S}^1 \to X(\mathbb{R})$ telle qu'il existe une variété algébrique réelle projective $Y \subset X$ lisse le long de $Y(\mathbb{R})$ avec $\phi(\mathbb{S}^1) = Y(\mathbb{R})$.

8. Montrer que l'énoncé 7. reste vrai si l'on remplace $\mathbb{S}^3$ par $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ et si $X = \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$.