Université de Paris

Limites hydrodynamiques

Du point de vue microscopique au point de vue macroscopique

Pierre Gervais

ENS | PSL

Différents niveaux de description

- Niveau macroscopique
- Niveau microscopique
- Point de vue mésoscopique
- Récapitulatif

Le problème des limites hydrodynamiques

- Le sixième problème de Hilbert
- Pourquoi ?
- Limite hydrodynamique de Boltzmann
- Mon approche

Différents niveaux de description

Niveau macroscopique

Instant t, point x

- masse : $R_t(x) \geq 0$
- vitesse : $U_t(x) \in \mathbb{R}^3$
- température : $T_t(x) \geq 0$
- viscosité, pression, conductivité thermique...

Exemple (Navier-Stokes incompressible)

$$\begin{cases} \partial_t U + U \cdot \nabla_x U = \nu \Delta_x U - \nabla_x P, \\ \mathrm{div}_x U = 0 \end{cases}$$

Différents niveaux de description

Niveau microscopique

$N \approx 10^{26}$ particules, de positions $x_i(t) \in \mathbb{R}^3$, vitesses $v_i(t) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i \\ \dot{v}_i = \text{interactions} \end{cases}$$

Différents niveaux de description

Point de vue mésoscopique

Théorie cinétique des gaz : comportement **statistique** micro $\rightarrow$ phénomènes macro

$$\int_{\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2} F_t(x,v)\mathrm{d}x\mathrm{d}v = \begin{array}{c}\text{Nb particules de position } x \in \mathcal{V}_1 \\ \text{et de vitesse } v \in \mathcal{V}_2\end{array}$$

- Masse : $R_t(x) = \displaystyle\int F_t(x,v)\mathrm{d}v$
- Qté. de mouvement : $R_t(x)U_t(x) = \displaystyle\int F_t(x,v)\, v\, \mathrm{d}v$
- Énergie : $\frac{1}{2}R_t(x)|U_t(x)|^2 + \frac{3}{2}R_t(x)T_t(x) = \displaystyle\int F_t(x,v)\frac{|v|^2}{2}\mathrm{d}v$

Différents niveaux de description

Point de vue mésoscopique

- 1860 : loi de distribution de Maxwell

$$F_t(x,v) = \frac{R_t(x)}{(2\pi T_t(x))^{3/2}} \exp\left(-\frac{|v-U_t(x)|^2}{2T_t(x)}\right) \quad \text{(ETL)}$$

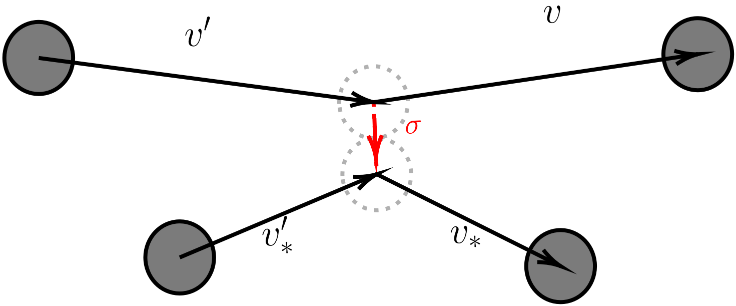
- 1872 : équation de Boltzmann :

$$\begin{aligned} \partial_t F_t + v \cdot \nabla_x F_t &= \begin{array}{c}\text{variation du nombre de} \\ \text{particules de vitesse } v\end{array} \\ &=: Q\Big(F_t(x,\cdot), F_t(x,\cdot)\Big)(v) \qquad \text{(BE)} \end{aligned}$$

Différents niveaux de description

Point de vue mésoscopique

$$Q(f,f)(v) = \int_{\mathbb{R}^3_{v_*} \times \mathbb{S}^2_\sigma} B(v - v_*, \sigma) \left(f(v'_*) f(v') - f(v) f(v_*) \right) \mathrm{d}v_* \mathrm{d}\sigma$$



$$v' + v'_* = v + v_*$$
$$|v'|^2 + |v'_*|^2 = |v|^2 + |v_*|^2$$

Différents niveaux de description

Point de vue mésoscopique

Masse, quantité de mouvement, énergie : conservation micro. $\Rightarrow$ conservation macro

Théorème (H-Theorème de Boltzmann)

L'**entropie**

$$H_t(x) := -\int F_t(x,v) \log F_t(x,v) \mathrm{d}v$$

est croissante et maximisée par les ETL:

$$\frac{R(x)}{(2\pi T(x))^{3/2}} \exp\left(-\frac{|v-U(x)|^2}{2T(x)}\right)$$

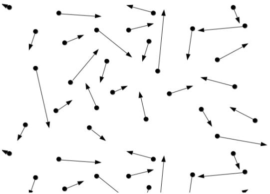
Lemme

$Q(F,F) = 0 \Leftrightarrow F$ est un ETL.

Différents niveaux de description

Récapitulatif

Macroscopique (NSI)	Mésoscopique	Microscopique
$U_t(x), R_t(x), T_t(x)$	$F_t(x, v)$	$(x_i(t), v_i(t))_{i=1}^N$
Vitesse, densité, température	Densité de particules de vitesse v et position x	Position exacte d'une particule n° i
Champs sur $\mathbb{R}^3_x$	Densité sur $\mathbb{R}^3_x \times \mathbb{R}^3_v$	Vecteurs de $\mathbb{R}^{6N}$
$\partial_t U + U \cdot \nabla_x U = \nu \Delta_x U - \nabla_x P$	$\partial_t F + v \cdot \nabla_x F = Q(F, F)$	$\dot{v}_i =$ interactions entre particules
À l'ETL	Tend vers un ETL	
Solutions faibles globales, donée initiale incompressible d'énergie finie unicité non-connue	Solutions faibles globales, don. ini. de masse, énergie et entropie finie unicité non-connue	Unique solution



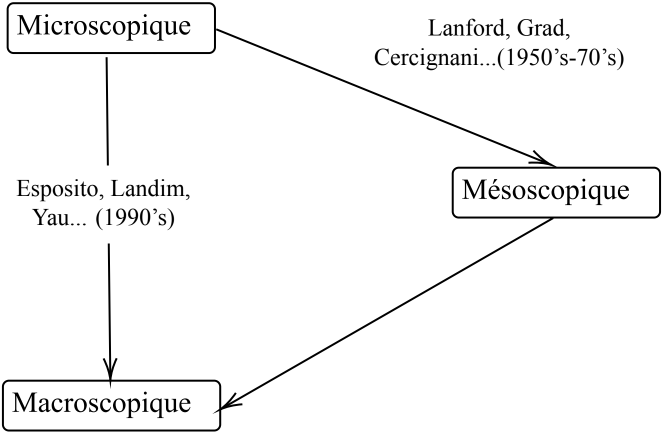
Le problème des limites hydrodynamiques

Le sixième problème de Hilbert

> *Le livre de M. Boltzmann sur les Principes de la Mécanique nous incite à établir et à discuter du point de vue mathématique d'une manière complète et rigoureuse les méthodes basées sur l'idée de **passage à la limite**, et qui de la conception atomique nous conduisent aux lois du mouvement des continua.*
>
> *D. Hilbert au 2ème congrès international des mathématiciens, Paris, 1900*

Le problème des limites hydrodynamiques

Le sixième problème de Hilbert



Le problème des limites hydrodynamiques

Pourquoi ?

- Axiomatisation de la physique
- Approximer Boltzmann par un modèle hydrodynamique
- Développer des schémas numériques

Le problème des limites hydrodynamiques

Limite hydrodynamique de Boltzmann

$$\partial_t F + v\cdot\nabla_x F = Q(F,F)$$

$$\Big\downarrow \text{ écriture en variables macro}$$

$$\varepsilon\partial_t F^\varepsilon + v\cdot\nabla_x F^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} Q(F^\varepsilon, F^\varepsilon)$$

Temps-distance moyen entre deux collisions $= \varepsilon \ll 1$

$$F_t^\varepsilon(x,v) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} F_t^0(x,v) = R_t(x)\exp\left(-\frac{|v-U_t(x)|^2}{2T_t(x)}\right)$$

Le problème des limites hydrodynamiques

Limite hydrodynamique de Boltzmann

Gaz quasiment à l'équilibre thermodynamique (global) M :

$$F^{\varepsilon} = M + \varepsilon f^{\varepsilon}, \quad M(v) = \frac{e^{-|v|^2/2}}{(2\pi)^{3/2}}$$

$$\downarrow$$

$$\partial_t f^{\varepsilon} + \mathcal{L}^{\varepsilon} f^{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} Q(f^{\varepsilon}, f^{\varepsilon}), \qquad (\mathrm{BE}^{\varepsilon})$$

$$\mathcal{L}^{\varepsilon} := \frac{1}{\varepsilon^2}\big(\varepsilon v \cdot \nabla_x + Q(M, \cdot) + Q(\cdot, M)\big)$$

Le problème des limites hydrodynamiques

Limite hydrodynamique de Boltzmann

Théorème (Bardos,Golse,Levermore,Saint-Raymond ('91-'03))

Si $\left(f_t^\varepsilon(x,v)\right)_\varepsilon$ sont **des** solutions **faibles** de l'équation (BE$^\varepsilon$), alors elles convergent en un sens **faible** vers un $f_t^0(x,v)$ de la forme

$$f_t^0(x,v) = \left(\rho_t(x) + u_t(x)\cdot v + \frac{1}{2}(|v|^2-3)\theta_t(x)\right) M$$

où ρ, u, θ satisfont le système de Navier-Stokes-Fourier incomp. :

$$\begin{cases} \partial_t u + u\cdot\nabla_x u = \nu\Delta_x u - \nabla_x p, \\ \partial_t\theta + u\cdot\nabla_x\theta = \kappa\Delta_x\theta, \\ \mathrm{div}_x u = 0, \quad \nabla_x(\rho+\theta) = 0, \end{cases} \tag{NSFI}$$

et ν, κ ne dépendent que de Q et M.

Remarque : (BE) et (NSFI) admettent des solutions faibles globales, on ne sait pas si elles sont uniques.

Le problème des limites hydrodynamiques

Limite hydrodynamique de Boltzmann

But : BGL fort

Si $\boldsymbol{f_{\text{in}}} \in \mathbf{X}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}}$, il existe $T > 0$ et d'**uniques** solution **fortes** f^ε de l'équation (BE$^\varepsilon$) sur un **intervalle** $[0, T)$. Celles-ci convergent en un sens **fort** vers un f^0, qui est donc automatiquement

$$f_t^0(x, v) = \left(\rho_t(x) + u_t(x) \cdot v + \frac{1}{2}(|v|^2 - 3)\theta_t(x)\right) M$$

pour certains ρ, u, θ satisfaisant le système de Navier-Stokes-Fourier incompressible

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla_x u = \nu \Delta_x u - \nabla_x p, \\ \partial_t \theta + u \cdot \nabla_x \theta = \kappa \Delta_x \theta, \\ \mathrm{div}_x u = 0, \quad \nabla_x(\rho + \theta) = 0. \end{cases} \tag{NSFI}$$

L'idéal étant $\mathbf{X}_{x,v}$ de la forme $L^1\left(\left(1 + |v|^2\right) \mathrm{d}v \mathrm{d}x\right)$

Le problème des limites hydrodynamiques

Limite hydrodynamique de Boltzmann

- 1991, Bardos-Ukai : $\|f_{\mathrm{in}}\|_E \ll 1$ et $T = \infty$

$$E := L^\infty_v H^s_x \left(e^{a|v|^2} \left(1 + |v|^b\right) \mathrm{d}v\mathrm{d}x \right),$$

- 2019, Gallagher-Tristani : $\cancel{\|f_{\mathrm{in}}\|_E \ll 1}$, $T =$ premier blow-up de (NSFI),

Remarque : Dans ce cadre, $\mathcal{L} = Q(M,\cdot) + Q(\cdot, M)$ est autoadjoint.

- 2021, G. : $\cancel{\|f_{\mathrm{in}}\|_{\mathcal{E}} \ll 1}$, $T =$ premier blow-up de (NSFI)

$$\mathcal{E} := L^1_v H^s_x \left(\left(1 + |v|^{3+0}\right) \mathrm{d}v\mathrm{d}x \right).$$

Remarque : Lorsque la donnée initiale est petite, $T = \infty$.

Le problème des limites hydrodynamiques

Mon approche

- Théorie d'élargissement de S. Mischler et C. Mouhot ('05-'17)
- Suivant des idées de M. Briant, S. Merino et C. Mouhot, et I. Gallagher et I. Tristani, découper la solution de (BE$^\varepsilon$) en $f^\varepsilon = f^0 + f^{\varepsilon,1} + f^{\varepsilon,2} + f^{\varepsilon,3} + f^{\varepsilon,4}$
  - f^0 est la solution de Navier-Stokes-Fourier incompressible
  - $f^{\varepsilon,1} \in \mathcal{E}$ satisfait une équation bien posée
  - $f^{\varepsilon,2} \in E$ est étudié comme dans Bardos-Ukai/Gallagher-Tristani (modulo un terme de couplage à étudier précisément)
  - le terme $f^{\varepsilon,3} \in E$ contient les ondes accoustiques
  - le terme $f^{\varepsilon,4} \in E$ dépend explicitement de $f^{\varepsilon,1}$
  - la donnée initiale est judicieusement répartie entre les $f^{\varepsilon,j}$

Merci de votre attention !