Les huit géométries de Thurston

(Q : qu'est ce que la géométrie ?)

Déf : Une géométrie modèle (est un couple) (X, G) avec X variété et G groupe de Lie, tel que :
* X est connexe et simplement connexe
* G est un groupe de difféo de X, agissant transitivement, à stabilisateurs compacts, et maximal pour ces propriétés
* Il existe une variété compacte/modelée sur X, cad que $Y = \Gamma \backslash X$, avec $\Gamma < G$ discret, agissant librement sur X.

Rque : (notre définition de modèle justifie les 1^{er} et $3^{ème}$ points :)
* X doit être revêtement universel d'une variété compacte connexe
* Pour le $2^{ème}$ point, on a :

Th : X admet une métrique G-invariante.

Dem : Soit $x \in X$, son stabilisateur G_x induit une action sur T_xX, dont l'image $H_x \subset GL(T_xX)$ est compacte. Soit $(.,.)$ un p.s. sur T_xX, alors $\langle X,Y\rangle_x := \int_{H_x} (hX, hY)\, dh$, où dh est la mesure de Haar de H_x, existe et est H_x-invariant. On définit $\langle X,Y\rangle_{gx} = \langle g^{-1}X, g^{-1}Y\rangle_x$ (ce qui ne dépend pas de $g \in G$ par H_x-invariance et définit $\langle .,. \rangle$ partout par transitivité)

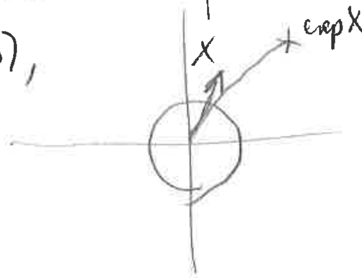
(G est un groupe d'isométrie pour X, et notre définition est riemannienne)

Rque : (l'existence d'un modèle compact Y implique que) Y est complète par Hopf-Rinow, et donc que X est complète.

On aura (de plus) besoin du th. (riemannien) suivant :

Th : Soit (M,g) une variété Riem. simplement connexe, complète, de courbure sectionnelle constante. Quitte à multiplier g par $k>0$, il y a 3 possibilités :
* $(M,g) = E^n$ si la courbure scalaire $r_M = 0$, (où) $n = \dim M$.
* $(M,g) = S^n$ —— $r_M = 1$
* $(M,g) = H^n$ —— $r_M = -1$

On suppose maintenant $\dim X = 3$, et pour $x \in X$, on note G'_x (resp. G') la composante connexe de l'identité de G_x (resp. G). On a $G'_x \hookrightarrow SO(T_x X)$: 1
(en effet, si l'action induite par) $h \in G_x$ sur $T_x X$, notée dh, est triviale, alors $\exp(X) = \exp(dh.X) = h\exp(X)$, et h agit trivialement sur X par complétude. Ainsi G'_x est un ss-gpe compact connexe de $SO(3)$,
cad $G'_x = SO(3)$, $SO(2)$ ou $\{e\}$. 2



On note $G'_x \simeq K$ (ne dép. pas du point) 3

Th (les géométries de dimension 3) : Il existe 8 géométries modèles :

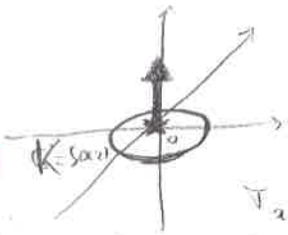
$\boxed{K = SO(3)}$ $X = E^3, S^3$ ou H^3 (munis de leurs isométries)

$\boxed{K = SO(2)}$ $X = S^2 \times E^1$, $H^2 \times E^1$, Nil ou $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$ (——)

$\boxed{K = \{e\}}$ $X = $ Sol (muni de ses isométries)

Dem : $\boxed{K = SO(3)}$ un plan de $T_x X$ peut être amené sur tout autre plan par l'action de $G'_x = SO(3)$, donc tout plan de TX peut être amené sur tout plan de TX par l'action de G. La courbure sectionnelle étant calculée avec le tenseur de courbure sur tout 2-plan et G agissant par isométries, donc préservant les tenseurs riemanniens, alors cette courbure sectionnelle est constante, d'où le résultat → elles on un modèle cpct

$\boxed{K = SO(2)}$ Soit $x \in X$. Comme $G'_x = SO(2)$, il existe un vecteur $V_x \in T_x X$ invariant par G'_x qui donne l'axe de rotation de G'_x.



Cela définit un champ de vecteur $V \in \Gamma(TX)$ par $V_{gx} = dg.V_x$, 4 (dont le flot définit un feuilletage $\mathcal{F}$). Si $h \in G'_x$, alors $h\exp_x(tV) = \exp_{hx}(t\,dh.V) = \exp_x(tV)$ et donc $h \in G_{\exp(tV)}$: si F est une trajectoire du flot et $x, y \in F$, alors $G'_x = G'_y$. (on va mq le flot agit par isométries)
Soit $\phi_t(x) = \exp_x(tV)$, et $g_t \in G'$ tel que $g_t \phi_t(x) = x$. On a donc $d\Phi := d(g_t \phi_t) : T_x X \to T_x X$, qui satisfait $d\Phi.V_x = dg_t.V_{\phi_t(x)} = V_{g_t\phi_t(x)} = V_x$.
De plus $d\Phi\, dh = dh\, d\Phi$, 5 $\forall h \in G'_x$, et donc $d\Phi$ est une application linéaire préservant l'axe V_x et commutant avec les rotations autour de V_x.
Si $d\Phi$ préserve de plus le volume, alors $d\Phi$ est elle même une rotation (car $SO(2)$ est abélien maximal dans $SL(2)$). 6

Mais V descend sur $Y = p\backslash X$ en un champ de vecteur G-invariant (Ainsi, $\forall x \in Y$, soit ω la forme volume de Y, alors $\frac{d}{dt}\big|_0 (\phi_t^* \omega)_x = \frac{d}{dt}\big|_0 (\phi_t^* \omega)_{gx} = c$ constante, ϕ_t et ω étant G-invariants et $G \curvearrowright Y$ transitivement. Comme de plus ϕ_t préserve le volume total, $c = 0$ et donc $\phi_t^* \omega = \omega$, d'où $\Phi^* \omega = \omega$ et $d\Phi$ préserve le volume de $T_x Y = T_x X$. $d\Phi : T_x M \to T_x M$ est donc une rotation, càd une isométrie

$\boxed{\text{Ainsi, } d\phi_t : T_x M \to T_{\phi_t(x)} M \text{ est une isométrie, et le flot de } V \text{ agit par isométries.}}$

(Maintenant, comme une feuille F est invariante par G'_x, $\forall x \in F$, on voit en considérant un voisinage de x difféomorphe à un vois. de 0 dans $T_x X$ que)

7 F est plongée proprement, donc $F \simeq S^1$ ou $\mathbb{R}$ dans X.

(De même, une autre feuille F' ne peut s'accumuler sur x, sinon la limite serait inv. par $G_{F'}$, d'où $G_F = G_{F'}$, ce qui est impossible par le même argument.)

Ainsi, le quotient $X/\mathcal{F} =: Y$ est une variété, et V agissant par isométries, Y hérite d'une métrique et d'une action transitive de G' par isométries. De plus, Y est connexe et simplement connexe 8 (et donc pour la même raison que précédemment,) $Y = E^2, S^2$ ou H^2. On a un fibré principal

$$\begin{array}{ccc} S^1 \text{ ou } \mathbb{R} & \longrightarrow & X \\ \circlearrowleft & & \downarrow \\ \mathbb{R} \text{ par le flot.} & & Y \end{array}$$

on peut considérer le champ de plan orthogonal à $\mathcal{F}$, qui définit une connexion pour ce fibré, ~~qu'on peut supposer~~ de courbure constante ~~quitte à changer la métrique dans les fibres~~ 9

$\Omega = 0$ | $X \to Y$ est plat, et Y simplement connexe, donc le fibré est trivial, et $X = S^2 \times E^1$, $H^2 \times E^1$ ou $E^2 \times E^1$. (Le groupe d'isométrie du troisième est contenu dans $\mathrm{Isom}(E^3)$, et donc n'est pas une nouvelle géométrie $\longrightarrow$ il y a des modèles exotiques

$\Omega \neq 0$ | On obtient un champ de plan maximalement non intégrable sur X, donc une structure de contact. (Elles sont toutes localement équivalentes à la structure de contact canonique sur $\mathbb{R}^3$

($P_{(x,y,z)} = (1,0,0) \wedge (0,1,x)$,

))

~~(La structure Riemannienne, elle, est déterminée loc par celle de Y et la courbure de X → Y)~~ On obtient finalement 3 cas, selon si $Y = E^2, H^2, S^2$:

* si $Y = E^2$, on obtient $X = \mathrm{Nil}$. G est le groupe d'iso de contacts (canonique) de $X = \mathbb{R}^3$ induisant une isométrie sur $Y = E^2$ → (Miguel :) il existe des modèles cpcts

* si $Y = S^2$, on obtient une variété loc. isométrique au fibré unitaire tgt (10)
$SO(3)$, dont le revêtement universel est S^3. G est contenu dans $\mathrm{Isom}(S^3)$, donc pas de nouvelle géométrie (G = iso préservant Hopf).

* si $Y = H^2$, le fibré unitaire tgt est $PSL(2,\mathbb{R})$, dont le revêtement universel est $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$; les deux agissent sur eux-mêmes **par isom.**
→ modèle cpct : le fibré unit. tgt d'une var. hyp. cpcte.
(($X \to Y$ quotienté par ϕ_1 donne le fibré unit. tgt))

$\boxed{K = \{e\}}$ l'action de G' est transitive, à stabilisateurs triviaux, donc libre, et on a donc $X \simeq G'$; (Ainsi) X est un grpe de Lie.
Comme X est simplement connexe, il est déterminé par son alg de Lie, (on étudie donc) $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$.
Soit $Y \in \mathrm{Lie}(G) = \{\text{ch. } \vec{v}\ G\text{-inv. à gauche}\}$, alors son flot est donné par $\phi_t(g) = g\,\phi_t(e)$ (car $\frac{d}{dt}\phi_t(g) = Y_g = dL_g Y_e = \frac{d}{dt} g\,\phi_t(e)$), (cad) multiplier à droite. Y doit préserver la forme volume inv à gauche, cad $R_{e^{tY}}\omega_e = \omega_{e^{tY}}$, ou encore $\omega_e = L_{e^{-tY}} R_{e^{tY}}\omega_e = \mathrm{Ad}_{e^{tY}}\omega_e$.
On veut donc $\det \mathrm{Ad}_{e^{tY}} = c$ cste, cad $\mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}\,V = 0$ en dérivant.
Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ une b.o.n. de $\mathfrak{g}$, cette condition se traduit en $\sum_i \langle [e_j, e_i], e_i \rangle = 0$, $\forall j$, ce qui donne $[e_i, e_{i+1}] = c_{i+2} e_{i+2}$ quitte à changer de base, les indices étant mod. 3. (11)
Toujours quitte à changer de base (12), on peut prendre $c_i = \pm 1, 0$, et supposer $c_1 \geqslant c_2 \geqslant c_3$, avec plus de +1 que de −1 (13). Il y a 6 possibilités

* $c_1 = c_2 = c_3 = 1 \Rightarrow G = SU(2) \simeq S^3$: pas de nouvelle géométrie
* $c_1 = c_2 = -c_3 = 1 \Rightarrow G = \widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$: pas de nouvelle géométrie
* $c_1 = 1, c_2 = c_3 = 0 \Rightarrow G = \mathrm{Heis}$: pas de nouvelle géométrie
* $c_1 = c_2 = c_3 = 0 \Rightarrow G = \mathbb{R}^3$:

↳ ce sont tous les "translations" de géométries déjà connues.

* $c_1 = -c_3 = 1$, $c_2 = 0$ $\Longrightarrow$ G est le revêtement universel des isométries de E^2, donc peut être identifié à E^3 muni des translations le long de E^2 et des vissages $\longrightarrow$ pas de nouvelle géométrie

* $c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = 0$ $\Longrightarrow$ $G = \underline{Sol}$

$[e_1, e_2] = 0$, donc $\mathbb{R}^2 \underset{gpe}{\subset} G$, et $[e_3, e_1] = e_2$
$[e_3, e_2] = e_1$

donc $\mathbb{R}^2 < G$, et $G/_{\mathbb{R}^2} \simeq \mathbb{R}$. (ad_{e_3} agit sur $\mathbb{R}^2 \subset \mathfrak{g}$ par $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ en diagonalisant. On $\mathrm{ad}_{e_3} X = X \Rightarrow \mathrm{Ad}_{e^{te_3}} X = tX$, et donc le flot de e_3 sur $x = \exp(X) \in \mathbb{R}^2$ est donné par $\phi_t(x) = e^t x$.
On a $(x, y, t)(x_0, y_0, t_0) = (e^{t_0} x + x_0, e^{-t_0} y + y_0, t + t_0)$).

---

1 Pour des raisons de dimension et par complétude, G' agit aussi transitivement.

2 * si $\dim G'_x = 3$, alors G'_x ouvert et fermé dans $SO(3)$ $\Longrightarrow$ $G'_x = SO(3)$
* si $\dim G'_x = 1$, alors G'_x var. cpcte de dim 1, donc $G'_x = S^1 \simeq SO(2)$ par unicité de la struct de gpe de Lie
* si $\dim G_x = 0$, $G_x = \{e\}$ par connexe

3 $g : G'_x \xrightarrow{\sim} G'_{gx}$ est un iso. ⚠ ne veut pas dire que $G'_x = G'_{gx}$ dans G'.
$k \longmapsto gk$

4 ne dép. pas de g. $dg_1^{-1} \cdot dg_2 \cdot V_{..} = d(g_1^{-1} g_2) V_x = V_x$ car $g_1^{-1} g_2 \in G'_x$

5 Car g_t commute avec les élts de $G'_x = G'_y$: en effet, $g_t h g_t^{-1} \in G'_x$, $\forall h \in G'_x$, donc $c_{g_t} \in \mathrm{Aut}(G'_x) \simeq \mathrm{Aut}(S^1)$ (car $G'_x \simeq S^1$, et) donc (soit) $c_{g_t} = \mathrm{Id}$, soit $c_{g_t} = \tau : z \mapsto \bar{z}$.
Or $[0,1] \longrightarrow G'/_K$ est continu, donc c_{g_t} est continu en t, donc $c_{g_t} = \mathrm{Id}$ pcq $c_e = \mathrm{Id}$
$t \longmapsto g_t$

6 Pour cela on utilise l'existence d'un modèle compact, qui a un volume

7 Dans ce voisinage, inv. par K $\Longleftrightarrow$ appartenir à l'axe horizontal
$\Longleftrightarrow$ propre dans l'ouvert du difféo.

8 Un chemin fermé dans Y peut ê relevé en un chemin dans X (par t.p.), qu'on peut refermer par connexité des fibres, puis on l'écrase ($\underset{0}{\pi_0(F)} \to \pi_1(X) \to \pi_1(Y) \to$

9 Le groupe d'isométrie est ainsi précisément le groupe des applications du fibré principal qui préservent la connexion, la métrique dans la fibre et descendent en une isométrie sur la base.

$G = \{ \tilde{h} : X \to X \mid h : Y \to Y \text{ isom.}, \ h : \pi^{-1}(y) \xrightarrow{\sim} \pi^{-1}(y) \text{ morph., isom.} \}$

10 Comme G préserve la métrique de $\mathbb{R}$ dans la fibre, elle descend de façon unique en un $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$ fibré principal, et il suffit de regarder ce cas, auquel on a un iso. nat. avec les fibrés UT. G devient le groupe des différentielles des isométries.

11 On note $L(e_i) = [e_{i+1}, e_{i+2}]$, ind. mod. 3, bien déf. car $e_i = e_{i+1} \overset{\text{produit vectoriel}}{\times} e_{i+2}$.

$\mathrm{Tr}\, \mathrm{ad}\, e_1 = 0 \implies L(e_3).e_2 - L(e_2).e_3 = 0$, et de m̂ pour les autres, d'où L symmétrique, donc diag. dans une base <u>ortho</u>.

12 $\{e_1, e_2, e_3\} \mapsto \{a_1 e_1, a_2 e_2, a_3 e_3\}$ reste orthogonal, donc quitte à rescaler $\langle \cdot , \cdot \rangle$ dans les directions données, on peut, et $c_i \mapsto c_i \dfrac{a_{i+1} a_{i+2}}{a_i}$.

13 On peut permuter les élts de la base.

* $\boxed{K = SO(3)}$ $[G ; G'] = 2$, car si $G'_x = K = SO(3)$, alors $G_x = O(3)$ forcément, et on obtient un iso. par mult. d'un élt. de $O(3)$.

$\boxed{K = SO(2)}$ $\boxed{\Omega = 0}$ $[G ; G'] = 4$, car ici la seule sol. est $G_x = O(2) \times \{\pm 1\}$.

$\boxed{\Omega = 1}$ les struct. de contact détermine l'ori, mais un chgt d'ori sur la base accompagné d'un chgt d'ori sur la fibre, ça le fait. D'où $[G ; G'] = 2$

$\boxed{K = \{e\}}$ on a $\mathbb{R}^2 < G$ et $G/_{\mathbb{R}^2} \simeq \mathbb{R}$, donc on peut changer l'ori de $\mathbb{R}^2$, celle de $\mathbb{R}$, et composer les deux : on a $[G : G'] = 8$.

A Tout le monde est orienté, car homogène $\Rightarrow \exists$ forme volume G-inv., en en choisissant une sur x et en la transportant par G.