Prédiction de suites individuelles
Cours 1 : Prédiction avec experts

Gilles Stoltz (CNRS – Ecole normale supérieure – HEC Paris)

Jeudi 10 mars 2011

Coordonnées : Gilles Stoltz
http://www.math.ens.fr/~stoltz

Plan de ce premier cours :

- Cadre de la prédiction avec experts, notion de regret
- Borne supérieure $M\sqrt{\frac{n}{2}\ln N}$ sur le regret
- Application : le lemme de Sion
- Suite des bornes supérieures :
  - Calibration des algorithmes lorsque n ou M sont inconnus
  - Amélioration pour des pertes cumulées faibles
- Borne inférieure $\square\, M\sqrt{n\ln N}$ sur le regret :
  - Enoncé et méthodes asymptotiques (début de la preuve, fin la semaine prochaine)

CADRE.

* Jeu répété entre le statisticien et un environnement (la nature ou le diable, selon que cet environnement joue indépendamment du ou contre le statisticien) :
  - Ensemble d'observations $\mathcal{Y}$ (arbitraire) pour l'environnement
  - Ensemble de décisions possibles $\mathcal{X}$ (convexe) pour le statisticien
  - Fonction de perte $\ell : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ (souvent $\mathbb{R}^+$, souvent même un compact de $\mathbb{R}^+$)

... et surtout ...
  - N experts, indexés par $j = 1, \dots N$, qui à chaque tour de jeu, procurent des prédictions.

* Déroulement du jeu de prédiction séquentielle : Pour $t = 1, 2, \dots$:

1. 1.1 Les experts choisissent leurs prédictions (en fonction du passé)
$$f_{1t}, \dots f_{Nt} \in \mathcal{X}$$
tandis que simultanément
   1.2 l'environnement choisit l'observation $y_t \in \mathcal{Y}$

2. Le statisticien a accès aux f_{jt} et forme une prédiction $\hat{p}_t \in \mathcal{X}$

3. Toutes les prédictions et l'observation sont révélées à l'ensemble des protagonistes.

* But : Le statisticien veut que son regret soit faible :

Perte cumulée du statisticien au tour n : $\hat{L}_n = \sum_{t=1}^{n} \ell(\hat{p}_t, y_t)$

de l'expert j $\qquad L_{jn} = \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{jt}, y_t)$

Regret : $\hat{L}_n - \min \{ L_{1n}, L_{2n}, \dots L_{Nn} \}$.

Si ℓ est bornée (p. ex. à valeurs dans $[0,1]$) alors $R_n = O(n)$.

On veut ici $R_n = o(n)$ ie, $\overline{\lim}_{n \to +\infty} R_n/n \leq 0$.

Interprétation : À la limite, on fait presqu'aussi bien que le meilleur expert, alors qu'on n'a aucune raison de savoir qui c'est à l'avance, d'une part, et que d'autre part, le meilleur expert change au cours du temps !

Rq : Souvent même, on voudra des bornes uniformes (voir th. page suivante).

* Exemple : Prédire, en un point donné, s'il va y avoir un dépassement de seuil d'alerte ou pas (p. ex. pour l'ozone) :
$\mathcal{Y} = \{0,1\}$, les experts produisent des prédictions $f_{jt} \in \{0,1\}$ et le statisticien indique une probabilité $\hat{p}_t \in \mathcal{X} = [0,1]$ de dépassement.

Note : La prédiction du statisticien ne peut être dans $\{0,1\}$, vu que l'on veut minimiser le regret pour toute suite $y_1, y_2, \ldots$ (environnement = nature) ou pour toute stratégie de l'environnement (= diable).

Puisque $\hat{p}_t$ et y_t sont choisis simultanément en apparence

→ Il existe en effet toujours une pire suite $y_t = |1 - \hat{p}_t|$ alors que si les deux experts sont $f_{1t} \equiv 0$ et $f_{2t} \equiv 1$, on a : $\hat{L}_n = n$ et $\min\{L_{1n}, L_{2n}\} \leq n/2$

soit $R_n \geqslant n/2$.

Conséquence de cet exemple : Il vaut mieux que $\mathcal{X}$ soit convexe !

* Remarque : On cherche donc des bornes plutôt "déterministes" (puisqu'on se place dans le cas le pire). En particulier, ici, les $y_1, y_2, \ldots$ ne sont pas la réalisation d'un certain processus stochastique.

PREMIER ALGORITHME : POIDS EXPONENTIELS, CAS $\mathcal{X}$ CONVEXE

* $\hat{p}_t = \mu_t \cdot (f_{1t}, \dots f_{Nt}) = \sum_{k=1}^{N} \mu_{kt} f_{kt}$ où :

$\mu_1 = (1/N, \dots 1/N)$ puis pour $t \geq 2$,

μ_t définie par $\mu_{jt} = \exp\left(-\eta \sum_{s=1}^{t-1} \ell(f_{js}, y_s)\right) \Big/ \sum_{k=1}^{N} \exp\left(-\eta \sum_{s=1}^{t-1} \ell(f_{ks}, y_s)\right)$

* Interprétations :

- on utilise les performances passés des experts
- on ne mise pas tout sur l'expert qui s'est montré le meilleur jusque là ; en effet, un ou plusieurs experts peuvent avoir des performances pour l'instant presqu' aussi bonnes que le meilleur, et, pourquoi pas, meilleures dans le futur.

* Théorème : Si ℓ est borné à valeurs dans $[0, M]$ et convexe en son premier argument, alors ($\sup_{(y_1, \dots y_n) \in \mathcal{Y}^n}$ ou sup sur les stratégies du diable)

$$\sup \hat{L}_n - \min_{j=1,\dots N} L_{jn} = \sup R_n \leq \frac{\ln N}{\eta} + \eta n \frac{M^2}{8}.$$

Corollaire : $\sup R_n \leq M\sqrt{\frac{n}{2}\ln N}$ lorsque l'on connaît M et n et prend $\eta = \frac{1}{M}\sqrt{8 \ln N / n}$.

Remarque : Evidemment, n et M sont en général inconnus, et la calibration est un souci ... On y reviendra en détails.

La preuve du théorème repose sur l'inégalité de probabilité suivante, dite lemme de Hoeffding :

Lemme (de Hoeffding) : Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $[a,b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$)
alors

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \ln \mathbb{E}\left[e^{sX}\right] \leq s\,\mathbb{E}[X] + \frac{s^2}{8}(b-a)^2$$

Remarque : Par inégalité de Jensen, on a la minoration

$$\ln \mathbb{E}\left[e^{sX}\right] \geqslant s\,\mathbb{E}[X].$$

<u>Preuve :</u> (sera sautée en cours)

$$\psi_X(s) \stackrel{\text{déf.}}{=} \ln \mathbb{E}\left[e^{sX}\right]$$

X étant bornée, il n'y a pas de problèmes pour appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètre :

$$\psi_X'(s) = \mathbb{E}\left[X e^{sX}\right] \Big/ \mathbb{E}\left[e^{sX}\right]$$

$$\psi_X''(s) = \frac{\mathbb{E}\left[X^2 e^{sX}\right]\mathbb{E}\left[e^{sX}\right] - \left(\mathbb{E}\left[X e^{sX}\right]\right)^2}{\left(\mathbb{E}\left[e^{sX}\right]\right)^2}$$

puisque $1/\mathbb{E}\left[e^{sX}\right] = e^{-\psi_X(s)}$

$$= \mathbb{E}\left[X^2 e^{sX} e^{-\psi_X(s)}\right] - \left(\mathbb{E}\left[X e^{sX} e^{-\psi_X(s)}\right]\right)^2$$

$$= \mathrm{Var}_{\mathbb{Q}}\, X$$

où $\mathbb{Q}$ est la probabilité absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ de densité $\omega \longmapsto \dfrac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(\omega) = e^{sX(\omega)} e^{-\psi_X(s)}$.

X étant à valeurs dans $[a,b]$, on a $\left|X - \left(\frac{b+a}{2}\right)\right| \leqslant \dfrac{b-a}{2}$

puis $$\mathrm{Var}_{\mathbb{Q}}\, X = \inf_{\mu \in \mathbb{R}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[(X-\mu)^2\right] \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}.$$

Soit : $$\psi_X''(s) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}$$

puis en intégrant 2 fois, et en utilisant

$$\psi_X'(0) = \mathbb{E}[X]$$

et $\psi_X(0) = \ln 1 = 0$, il vient :

$$\psi'_X(s) - \psi'_X(0) \leqslant \int_0^s \frac{(b-a)^2}{4}\,du = \frac{(b-a)^2}{4}\, s$$

$$\psi'_X(s) \leqslant \mathbb{E}[X] + \frac{(b-a)^2}{4}\, s$$

$$\psi_X(s) - \cancel{\psi_X(0)} \leqslant \int_0^s \left(\mathbb{E}[X] + \frac{(b-a)^2}{4} u \right) du$$

$$= s\,\mathbb{E}[X] + \frac{(b-a)^2}{8} s^2 .$$

<u>Preuve</u> du théorème : On commence par utiliser la convexité des $\ell(\cdot, y_t)$:

$$\widehat{L}_n = \sum_{t=1}^n \ell(\widehat{p}_t, y_t) = \sum_{t=1}^n \ell\big(\mu_t \cdot (f_{jt})_j , y_t \big)$$

$$\leqslant \sum_{t=1}^n \sum_{j=1}^N \mu_{jt}\, \ell(f_{jt}, y_t)$$

et donc

$$R_n \leqslant \sum_{t=1}^n \sum_{k=1}^N \mu_{kt}\, \ell(f_{kt}, y_t) - \min_{j=1,\dots,N} \sum_{t=1}^n \ell(f_{jt}, y_t).$$

On note $\ell_t(k) = \ell(f_{kt}, y_t)$, pour aller plus vite d'une part, et d'autre part, pour voir le côté générique de la méthode.

On a défini
$$\mu_{kt} = \frac{w_{k\,t-1}}{W_{t-1}} \quad \text{où} \quad w_{k\,t-1} = \exp\Big(-\eta \sum_{s=1}^{t-1} \ell_s(k)\Big) \quad (=1 \text{ si } t=1)$$

$$\text{et} \quad W_{t-1} = w_{1\,t-1} + \dots w_{N\,t-1}$$

Il suffit d'étudier

le log-rapport $\ln \dfrac{W_n}{W_0}$.

Minoration : $W_n \geqslant e^{-\eta L_{jn}}$ pour tout j et $W_0 = N$, soit

$$\ln \frac{W_n}{W_0} \geqslant -\eta L_{jn} - \ln N$$

Majoration : Pour $t = 1, \ldots n$:

$$\ln \frac{W_t}{W_{t-1}} = \ln \frac{\sum_k w_{k,t-1} e^{-\eta \ell_t(k)}}{\sum_k w_{k,t-1}}$$

$$= \ln \sum_k \mu_{kt} e^{-\eta \ell_t(k)}$$

$$\underset{\text{par Hoeffding}}{\leq} -\eta \sum_k \mu_{kt} \ell_t(k) + \frac{\eta^2}{8} M^2$$

où $X = \ell_t(\cdot)$

soit $a = M$, $b = 0$, et $s = -\eta$

En sommant sur t et en combinant avec la minoration :

$$\forall j = 1, \ldots N, \quad -\eta L_{jn} - \ln N \leq -\eta \sum_t \sum_k \mu_{kt} \ell_t(k) + \frac{\eta^2}{8} M^2 n$$

Au final :

$$R_n \leq \sum_{t,k} \mu_{kt} \ell_t(k) - \min_j L_{jn} \leq \frac{\ln N}{\eta} + \frac{\eta}{8} M^2 n .$$

APPLICATION : LE LEMME DE SION. → (Utilisé notamment en théorie de l'information pour prouver que minmax = maxmin)

Lemme (de Sion) : Soit $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux ensembles convexes.

Soit $f : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \longrightarrow [0, M]$ une fonction telle que

- $\forall x \in \mathcal{X}$, $f(x, \cdot)$ est concave,
- $\forall y \in \mathcal{Y}$, $f(\cdot, y)$ est convexe.

Alors sous des hypothèses de régularité (à préciser) :

$$\inf_{x \in \mathcal{X}} \sup_{y \in \mathcal{Y}} f(x,y) = \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} f(x,y).$$

Remarque : Autre application en théorie des jeux pour montrer l'existence d'une valeur pour les jeux à somme nulle (voir un prochain cours).

Preuve : * $\geqslant$ est toujours vraie :

$$\forall y, \forall x, \qquad f(x,y) \geqslant \inf_{x' \in \mathcal{X}} f(x', y)$$

passant aux sup : $\sup_{y \in \mathcal{Y}} f(x,y) \geqslant \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x' \in \mathcal{X}} f(x', y)$

puis passer à l'inf en $x \in \mathcal{X}$.

* Pour $\leqslant$: Soit N un entier fixé et $\{ x^{(1)}, \dots x^{(N)} \}$ N points de $\mathcal{X}$ (quelconques).

On fixe n

↳ On fait jouer un statisticien et un diable fictifs de la sorte :

le diable sait que le statisticien utilise l'algorithme de pondération par poids exponentiels :

$$x_1 = \frac{1}{N} \sum_i x^{(i)} \qquad \text{puis pour } t \geqslant 2,$$

$$x_t = \frac{\sum_{i=1}^N x^{(i)} \exp\left(-\eta \sum_{s=1}^{t-1} f(x^{(i)}, y_s)\right)}{\sum_{i=1}^N \exp\left(-\eta \sum_{s=1}^{t-1} f(x^{(i)}, y_s)\right)}$$

et peut donc faire le choix simultané au tour $t = 1, 2, \dots n$ (choix ne dépendant lui aussi que du passé) de y_t tq.

$$f(x_t, y_t) \geqslant \sup_{y \in \mathcal{Y}} f(x_t, y) - 1/n.$$

Alors, pour le choix $\eta = \frac{1}{M}\sqrt{\frac{8 \ln N}{n}}$

et par le théorème principal, par convexité de f en son premier argument :

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} f(x_t, y_t) \leqslant \min_{i=1,\dots N} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} f(x^{(i)}, y_t) + M\sqrt{\frac{1}{2n}\ln N}.$$

Et donc : $\inf_{x \in \mathcal{X}} \sup_{y \in \mathcal{Y}} f(x,y) \leqslant \sup_{y \in \mathcal{Y}} f\left(\frac{1}{n}\sum_t x_t, y\right)$

$$\underset{\substack{\text{par convexité}\\ \text{des } f(\cdot, y)}}{\leqslant} \sup_{y \in \mathcal{Y}} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} f(x_t, y)$$

$$\underset{\substack{\text{convexité}\\ \text{du sup}}}{\leqslant} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \sup_{y \in \mathcal{Y}} f(x_t, y)$$

$$\underset{\text{def des } y_t}{\leqslant} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} f(x_t, y_t) + 1/n$$

$$\underset{\substack{\text{on réinjecte}\\ \text{l'inég. du}\\ \text{haut de la page}}}{\leqslant} \min_{i=1,\dots N} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} f(x^{(i)}, y_t) + M\sqrt{\ln N / 2n} + 1/n$$

$$\underset{\substack{\text{par concavité}\\ \text{des}\\ f(x^{(i)}, \cdot)}}{\leqslant} \min_{i=1,\dots N} f\left(x^{(i)}, 1/n \sum_{t=1}^{n} y_t\right) + M\sqrt{\ln N/2n} + 1/n$$

$$\leqslant \sup_{y \in \mathcal{Y}} \min_{i=1,\dots N} f(x^{(i)}, y) + o(1)$$

Conclusion : — n ayant été choisi arbitrairement, on a, en faisant $n \to +\infty$:

$$\inf_{x \in \mathcal{X}} \sup_{y \in \mathcal{Y}} f(x,y) \leqslant \sup_{y \in \mathcal{Y}} \min_{i=1,\dots N} f(x^{(i)}, y)$$

En utilisant simplement les hypothèses de convexité / concavité, on a prouvé :

$$\inf_{x \in \mathcal{X}} \sup_{y \in \mathcal{Y}} f(x,y)$$

$$\leqslant \inf_{N \in \mathbb{N}} \inf_{\{x_1, \dots x_N\} \subset \mathcal{X}} \sup_{y \in \mathcal{Y}} \min_{j=1,\dots N} f(x^{(j)}, y)$$

Les hypothèses de régularité vont assurer que le membre droit, a priori $\geqslant \sup_y \inf_x f(x,y)$ est en fait aussi $\leqslant \sup_y \inf_x f(x,y)$, et donc $=$.

Hyp. : $\mathcal{X}$ compact et $f : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \longrightarrow [0,M]$ uniformément continue p. ex.

Soit $\varepsilon > 0$, soit $\delta > 0$ le module d'uniforme continuité sur $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ correspondant. Soit $x^{(1)}, \dots x^{(N_\delta)}$ tq. les boules $B(x^{(j)}, \delta)$ recouvrent $\mathcal{X}$. Par uniforme continuité,

$$|x - x^{(j)}| \leqslant \delta \Rightarrow \forall y, \ |f(x,y) - f(x^{(j)}, y)| \leqslant \varepsilon$$

soit en particulier, $\forall y, \ \min_{j=1,\dots N_\delta} f(x^{(j)}, y) \leqslant f(x,y) + \varepsilon$

Passant à l'$\inf_{x \in \mathcal{X}}$ puis $\sup_{y \in \mathcal{Y}}$: $\sup_y \min_{j=1,\dots N_\delta} f(x^{(j)}, y)$

$$\leqslant \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} f(x,y) + \varepsilon$$

Soit donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \inf_{x \in \mathcal{X}} \sup_{y \in \mathcal{Y}} f(x,y) \leqslant \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} f(x,y) + \varepsilon.$$

D'où l'inégalité recherchée.

CALIBRATION DE η : ADAPTATION EN n ET/OU M.

Dans le premier théorème, pour avoir la bonne borne $M\sqrt{\frac{n}{2}\ln N}$ sur le regret, il fallait choisir $\eta = \frac{1}{M}\sqrt{\frac{8\ln N}{n}}$ pour optimiser la borne théorique $\frac{\ln N}{\eta} + \eta n \frac{M^2}{8}$.

Si η est mal choisi ou si on joue pour une infinité de tours, alors potentiellement, la borne peut être linéaire.

On n'a pas toujours de raisons de savoir pour combien de tours n on joue ni quelle est l'étendue $[0,M]$ des pertes.

Solution : Calibrer η en fonction du passé, i.e., trouver une règle de choix de η_t au tour t en fonction des informations procurées par les tours $s = 1, \ldots t-1$; et utiliser, pour $t \geq 2$, la probabilité

$$\mu_t = (\mu_{jt})_{j=1,\ldots N} \text{ avec } \mu_{jt} = \frac{\exp\left(-\eta_t \sum_{s=1}^{t-1} \ell_{js}\right)}{\sum_{k=1}^{N} \exp\left(-\eta_t \sum_{s=1}^{t-1} \ell_{ks}\right)}$$

où l'on note $\ell_{ks} = \ell(f_{ks}, y_s)$ la perte de l'expert k au tour s (juste pour aller plus vite ici encore).

Lemme : Si la règle est telle que $(\eta_t)_t$ est décroissante, et les $\ell(\cdot, y)$ sont toutes convexes, alors :

$$R_n \leq \frac{\ln N}{\eta_{n+1}} + \sum_{t=1}^{n} \Phi\left(\mu_t, \eta_t, (\ell_{kt})_k\right)$$

où $\Phi(\mu, \eta, (\ell_k)_k)$

$$= \frac{1}{\eta} \ln \sum_{k=1}^{N} \mu_k \, e^{-\eta\left(\ell_k - \sum_{k'} \mu_{k'} \ell_{k'}\right)} \quad [\text{terme type Hoeffding}].$$

Rq : La valeur de η_1, ou $\mu_1 = (1/N, \ldots 1/N)$, n'a pas d'importance.

<u>Preuve :</u> On note $\mu_{jt} = \dfrac{w_{j\,t-1}}{W_{t-1}}$ où $w_{j\,t-1} = e^{-\eta_t \sum_{s=1}^{t-1} \ell_{js}}$ et $W_{t-1} = \sum_{j=1}^{N} w_{j\,t-1}$

tandis que $w'_{j\,t-1} = e^{-\eta_{t-1} \sum_{s=1}^{t-1} \ell_{js}}$, $W'_{t-1} = \sum_{j=1}^{N} w'_{j,t-1}$.

La technique consiste, selon la même logique que précédemment, à majorer et minorer

$$\frac{1}{\eta_{n+1}} \ln W_n - \frac{1}{\eta_1} \ln W_0$$

$$\underset{(\forall j)}{\geqslant} -\sum_{t=1}^{n} \ell_{jt} - \frac{1}{\eta_1} \ln N \qquad \text{d'une part}$$

D'autre part, on rappelle que $L_{j\,t-1} = \sum_{s=1}^{t-1} \ell_{js}$ (par notation),

et
$$\frac{1}{\eta_{t+1}} \ln W_t - \frac{1}{\eta_t} \ln W_{t-1}$$

mesure le coût de l'adaptativité

correspond au terme Hoeffding.

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{\eta_{t+1}} \ln W_t - \frac{1}{\eta_t} \ln W'_t \right)} + \underbrace{\left(\frac{1}{\eta_t} \ln \frac{W'_t}{W_{t-1}} \right)}$$

$$\frac{1}{\eta_t} \ln \frac{W'_t}{W_{t-1}} = \frac{1}{\eta_t} \ln \left(\sum_j \frac{w_{j\,t-1}}{W_{t-1}} e^{-\eta_t \ell_{jt}} \right) \underset{\text{par déf.}}{=} -\sum_j \mu_{jt} \ell_{jt} + \Phi\big(\eta_t, (\mu_{jt}), (\ell_{jt})\big)$$

$$\frac{1}{\eta_{t+1}} \ln W_t - \frac{1}{\eta_t} \ln W'_t = \frac{1}{\eta_{t+1}} \ln \sum_j \left(e^{-L_{jt}}\right)^{\eta_{t+1}} - \frac{1}{\eta_t} \ln \sum_j \left(e^{-L_{jt}}\right)^{\eta_t}$$

$$= \ln \frac{\left\| \left(e^{-L_{jt}}\right)_{j=1\ldots N} \right\|_{\eta_{t+1}}}{\left\| \left(e^{-L_{jt}}\right)_{j=1\ldots N} \right\|_{\eta_t}} \underset{\text{Hölder}}{\leqslant} \ln \left\| (1, \ldots 1) \right\|_q = \ln N^{1/q} = \left(\frac{1}{\eta_{t+1}} - \frac{1}{\eta_t} \right) \ln N$$

Rappel : si p, q, r sont tels que $1/p + 1/q = 1/r$, l'inégalité de Hölder assure que $\|(u_j v_j)_j\|_r \leqslant \|\underline{u}\|_p \, \|\underline{v}\|_q$

↳ car ici, $p = \eta_t$ et $r = \eta_{t+1}$ soit $1/q = 1/\eta_{t+1} - 1/\eta_t \geqslant 0$

En combinant majorations et minoration, on conclut :

$$-L_{jn} - \frac{1}{\eta_1} \ln N \leqslant -\underbrace{\sum_{t=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \mu_{kt} \ell_{kt}}_{\leqslant -\hat{L}_n \text{ par convexité.}} + \sum_{t=1}^{n} \Phi\big(\eta_t, (\mu_{jt}), (\ell_{jt})\big) + \sum_{t=1}^{n} \left(1/\eta_{t+1} - 1/\eta_t \right) \ln N$$

Soit $$\hat{L}_n - L_{jn} \leq \Big(\underbrace{\sum_{t=1}^{n} \left(1/\eta_{t+1} - 1/\eta_t\right) \ln N \Big) + \frac{1}{\eta_1} \ln N}_{= 1/\eta_{n+1} \, \ln N} + \sum_{t=1}^{n} \Phi\big(\eta_t, (\mu_{jt}), (\ell_{jt})\big).$$

__Cor 1:__ Si M est connu, alors pour la règle de choix $\eta_t = 1/M \sqrt{4 \ln N / t}$

on a $\sup R_n \leq M \sqrt{(n+1) \ln N}$.

__Preuve:__ Par l'inégalité de Hoeffding, $\Phi(\mu, \eta, (\ell_k)_k) \leq \eta \frac{M^2}{8}$

soit $$R_n \leq \frac{\ln N}{\eta_{n+1}} + \left(\sum_{t=1}^{n} \eta_t \right) \frac{M^2}{8}$$

Or $$\sum_{t=1}^{n} 1/\sqrt{t} \leq \int_1^{n+1} 1/\sqrt{u} \, du \leq 2\sqrt{n+1}$$

Pour $\eta_t = \frac{\gamma}{M} \sqrt{\frac{\ln N}{t}}$: $$R_n \leq M \sqrt{(n+1) \ln N} \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma}{4} \right)$$

$\gamma = 2$ est la meilleure valeur.

__Rq:__ On perd donc juste un facteur $\sqrt{2}$ comme prix de l'adaptation en n.

__Rq:__ Pour le reste, on sera plus paresseux sur le calcul des constantes universelles.

__Cor 2:__ Pour M et n inconnus, via un bon choix des η_t,

$$R_n \leq \square \sqrt{\sum_{t=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \mu_{kt} \ell_{kt}^2 \ln N} + \underbrace{\cdots}_{O(1)}$$

(où $\square$ désigne une constante universelle dont la preuve donne la valeur).

$$\leq \square M \sqrt{n \ln N} + \cdots$$

__Preuve:__ * Si $x \geq 0$, $e^{-x} \leq 1 - x + x^2/2$

d'où $$0 < \sum_{k=1}^{N} \mu_k e^{-\eta \ell_k} \leq 1 - \eta \sum_k \mu_k \ell_k + \frac{1}{2} \sum_k \mu_k \ell_k^2 \eta^2$$

soit $e^{\eta \Phi(\mu, \eta, (\ell_k))} \times e^{-\eta \sum_{k'} \mu_{k'} \ell_{k'}}$
$= \sum_k \mu_k e^{-\eta \ell_k}$
$\leq 1 - \eta \sum_k \mu_k \ell_k + \frac{1}{2} \sum_k \mu_k \ell_k^2$

~~puis~~ $$\Phi(\mu, \eta, (\ell_k)) \leq \frac{1}{2} \eta \sum_k \mu_k \ell_k^2$$

(où l'on a utilisé $\ln(1+u) < u \ \forall u > -1$)

* On note $v_t = \sum_k \mu_{kt} \ell_{kt}^2$; on a donc prouvé :

$$R_n \leqslant \frac{\ln N}{\eta_{n+1}} + \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n} \eta_t v_t$$ → intuition : meilleur choix de η constant serait tq. $\frac{\ln N}{\eta} + \frac{1}{2}\eta V_n$ soit minimal

Notant $V_t = v_1 + \dots v_t$ et prenant $\eta_t = \gamma\sqrt{\frac{\ln N}{V_{t-1}}}$ pour $t \geqslant 2$, il s'agit de

contrôler
$$\sum_{t=T}^{n} \frac{1}{\sqrt{V_{t-1}}}\left(V_t - V_{t-1}\right) = \sum_{t=T}^{n} \frac{\sqrt{V_t}+\sqrt{V_{t-1}}}{\sqrt{V_{t-1}}}\left(\sqrt{V_t} - \sqrt{V_{t-1}}\right)$$

(où T est le 1er instant t tel que $V_{t-1} \geqslant M^2$)

$$\leqslant 3\sum_{t=T}^{n}\left(\sqrt{V_t} - \sqrt{V_{t-1}}\right)$$
$$\leqslant 3\sqrt{V_n}$$

où l'on a utilisé
$$\sqrt{V_t} \leqslant \sqrt{V_{t-1}} + \sqrt{v_t} \leqslant \sqrt{V_{t-1}} + \sqrt{M^2} \leqslant 2\sqrt{V_{t-1}}$$
vu $\sqrt{V_{t-1}} \geqslant \sqrt{M^2}$ pour $t \geqslant T$.

Il reste :

$$R_n \leqslant \frac{1}{\gamma}\sqrt{V_n \ln N} + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{t=1}^{T-1}\eta_t v_t}_{\substack{\leqslant \eta_2 V_{T-1}/2 \\ \leqslant \eta_2 M^2/2 \\ = O(1)}} + \frac{3}{2}\gamma\sqrt{V_n \ln N}$$

$\eta_2 = \gamma\sqrt{\ln N / v_1}$ et (cf. $v_1 = \frac{1}{N}\sum_k \ell_{k,1}^2$)

Soit
$$R_n \leqslant \square\sqrt{V_n \ln N} + O(1).$$

Cependant, l'adversaire peut rendre ce terme grand. → Solution :

Rq : En prenant
$$\eta_t = \min\left\{\frac{1}{\max_{\substack{s\leqslant t-1 \\ \& j=1,\dots,N}} \ell_{j,s}} ; \gamma\sqrt{\frac{\ln N}{V_{t-1}}}\right\}$$

on peut obtenir une borne plus satisfaisante, de la forme
$$R_n \leqslant \square\sqrt{V_n \ln N} + \square M \ln N,$$
où les $\square$ sont des constantes explicites universelles.

Cor 3 : « Amélioration pour les pertes cumulées faibles » → utile lorsque l'un des experts au moins est bon et que $L_n^* \ll n$.

Le Cor. 2 implique

$$R_n = \hat{L}_n - L_n^* \leqslant \square\sqrt{M\, L_n^* \ln N} + \square M \ln N,$$

et ce, sans connaissance préalable ni de n, ni de M, ni de L_n^*.

Preuve : De $R_n \leqslant \square\sqrt{V_n \ln n} + \square M \ln N$ (cf. remarque ci-dessus)

on passe à $R_n \leqslant \square\sqrt{M\, \hat{L}_n \ln N} + \square M \ln N$

en majorant $V_n = \sum_t \sum_k p_{k,t}\, \ell_{k,t}^2 \leqslant M \sum_{t,k} p_{k,t}\, \ell_{k,t} = M\hat{L}_n$.

Soit $\hat{L}_n \leqslant L_n^* + \square M \ln N + \square\sqrt{(M \ln N)\, \hat{L}_n}$.

On utilise ensuite que

$$x \leqslant C + \gamma\sqrt{x} \quad (\text{avec } x, C, \gamma \geqslant 0)$$

implique $x \leqslant C + \gamma\sqrt{C} + \gamma^2$.

Pr (de cette dernière implication) : Il s'agit de résoudre une inéquation du second degré.

Méthode 1 $x \leqslant C + \gamma\sqrt{x} \iff \left(\sqrt{x} - \frac{\gamma}{2}\right)^2 \leqslant C + \frac{\gamma^2}{4}$

ainsi, soit $\sqrt{x} \leqslant \gamma/2$

soit $\sqrt{x} - \gamma/2 = \sqrt{(\sqrt{x} - \gamma/2)^2} \leqslant \sqrt{C + \gamma^2/4}$
$\leqslant \frac{\gamma}{2} + \sqrt{C}$.

Dans les deux cas,

$\sqrt{x} \leqslant \gamma + \sqrt{C}$, que l'on réinjecte (à droite)

dans $x \leqslant C + \gamma\sqrt{x}$.

Méthode 2 : $\sqrt{x} \leqslant r^*$ où r^* est la plus grande racine de

$$X^2 - \gamma X - C = 0$$

soit $r^* = \dfrac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4C}}{2}$ et $x \leqslant (r^*)^2 \leqslant \frac{1}{4}\left(\gamma^2 + \gamma^2 + 4C + 2\gamma^2 + 4\gamma\sqrt{C}\right)$

d'où le résultat.

BORNES INFÉRIEURES SUR LE REGRET

Démarche : Après les bornes sup... les bornes inf !
Voici une première version asymptotique.

Optimalité asymptotique de la borne générale. (Vitesses en n et N mais aussi la constante !)

Théorème. Pour $\mathcal{X} = [0,1]$, $\mathcal{Y} = \{0,1\}$ et $\ell : (x,y) \mapsto |x-y|$, toute stratégie de prédiction encourt un regret R_n tel que

$$\liminf_{N \to +\infty} \liminf_{n \to +\infty} \sup R_n \Big/ \sqrt{\frac{n}{2} \ln N} \geqslant 1$$

où il suffit de prendre le supremum sur des suites individuelles d'observations (et de prédictions des experts).

Rq : On n'a donc même pas besoin de jouer contre le diable, l'environnement peut ne pas réagir.

Preuve : * On va montrer un résultat plus fort, en remplaçant $\sup R_n$ par $\mathbb{E}R_n$, où l'on tire au hasard les prédictions $F_{j,t}$ et les observations Y_t toutes iid $\sim$ Ber(1/2).

Alors, puisque les Y_t sont indépendants de tout le reste et $\sim$ Ber(1/2), notant $\mathbb{E}_t = \mathbb{E}\left[\,\cdot\,\middle|\, F_{j,s}\text{ où } j=1,\dots N \text{ et } s = 1,\dots t,\ Y_{s'} \text{ où } s'=1,\dots t-1\right]$ l'espérance conditionnelle par rapport à l'information disponible au statisticien au début du tour t (pour former $\hat{p}_t$), il vient, $\hat{p}_t$ étant ainsi fixé,

$$\mathbb{E}_t\left[\ell(\hat{p}_t, Y_t)\right] = \frac{1}{2}\hat{p}_t + \frac{1}{2}(1-\hat{p}_t) = 1/2$$
$$= \mathbb{E}_t\left[|\hat{p}_t - Y_t|\right]$$

soit au final, $\mathbb{E}\left[\hat{L}_n\right] = n/2$. (Morale : c'est dû à la contrainte de prédiction séquentielle)

Tandis que : $L_{jn} = \sum_{t=1}^{n} |F_{jt} - Y_t|$, dont on fait une évaluation rétrospective.

Conditionnellement à $Y_1, \dots Y_n$, les $|F_{jt} - Y_t|$ sont iid $\sim Ber(1/2)$ lorsque j et t varient, les L_{jn} sont donc iid $\sim Bin(n, 1/2)$ lorsque j varie. De plus, cette loi commune est indépendante des $Y_1, \dots Y_n$.

Ainsi :
$$\mathbb{E} R_n = \mathbb{E} \hat{L}_n - \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\min_{j=1..N} L_{jn} \mid Y_1 \dots Y_n \right]\right]$$
$$= n/2 - \mathbb{E}\left[\min_{j=1,\dots N} B_{jn} \right]$$

où $B_{1n}, \dots B_{Nn}$ sont N variables aléatoires iid $\sim Bin(n, 1/2)$.

$$\mathbb{E} R_n = \sqrt{n} \cdot \mathbb{E}\left[\max_{j=1,\dots N} \left(\frac{n}{2} - B_{jn}\right) \Big/ \sqrt{n} \right]$$

et il suffit donc de s'intéresser à l'espérance du maximum de droite.

* <u>Heuristique</u> : Par TCL $2\left(\frac{n/2 - B_{jn}}{\sqrt{n}}\right) \longrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$

on s'attend à ce que $2 \cdot \mathbb{E}\left[\max_j \left(\frac{n/2 - B_{jn}}{\sqrt{n}}\right)\right] \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbb{E}\left[\max_{j=1,\dots N} G_j \right]$

où G_j iid $\sim \mathcal{N}(0,1)$

puis on utilise que $\mathbb{E}\left[\max_j G_j \right] \underset{N \to +\infty}{\sim} \sqrt{2 \ln N}$.

$\rightarrow$ Les détails formels au prochain numéro !