

TD 1 théorie des jeux

ENPC 2005-2006

Théorie de la décision.

Exercice 1. Axiome de Houthakker.

On a une fonction de choix c . Soit l'axiome de Houthakker : "Si $x, y \in A \cap B$, $x \in c(A)$, $y \in c(B)$, alors $x \in c(B)$." Montrer que cet axiome est équivalent à la conjonction des axiomes α et β de Sen.

Exercice 2. Préférences lexicographiques.

Sur $X = [0, 1] \times [0, 1]$, on définit la relation de préférences entre $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ par $x \succ y$ si et seulement si $x_1 > y_1$, ou $(x_1 = y_1 \text{ et } x_2 > y_2)$. C'est donc l'ordre lexicographique sur X .

1. Montrer que \succ est rationnelle.
2. Montrer que \succ n'est représentable par aucune fonction d'utilité. C'est à dire, montrer qu'il n'existe pas d'application u de X vers \mathbb{R} telle que $x \succ y$ si et seulement si $u(x) > u(y)$.
3. Les militaires de Freedonia peuvent évaluer la qualité d'un plan de guerre contre l'ennemi Sylvania par une distribution de probabilités $(p_1, p_2, 1 - p_1 - p_2)$ sur les trois possibilités: Freedonia gagne la guerre, status quo, Freedonia perd la guerre. Le premier ministre de Freedonia exprime ses préférences sur ces probabilités par l'ordre lexicographique:

$$(p_1, p_2, p_3) \succ (q_1, q_2, q_3) \Leftrightarrow (p_3 < q_3) \text{ ou } (p_3 = q_3 \text{ et } p_2 < q_2)$$

Peut-on représenter \succ par une utilité de Von-Neumann et Morgenstern ?

Quels axiomes de Von-Neumann et Morgenstern sont vérifiés ?

Lesquels ne le sont pas ?

Exercice 3. Aversion au risque.

Un agent a le choix entre les loteries suivantes:

Loterie 1: les valeurs sont (25 Euros, 150 Euros, 600 Euros) avec les probabilités (0.7,0.2,0.1).

Loterie 2: les valeurs sont (80 Euros, 90 Euros, 98 Euros) avec les probabilités (0.2,0.58,0.22).

Loterie 3: les valeurs sont (2 Euros, 105 Euros) avec les probabilités (0.05,0.95).

On suppose que cet agent a une aversion au risque (absolu) constante, et qu'il est indifférent entre une somme de 45 Euro sûre et une loterie donnant 0 ou 100 Euro avec probabilités $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Quelle est la meilleure loterie pour cet agent (parmi les 3) ?

Exercice 4. Jeu à Las Vegas.

Règle du jeu : A chaque partie, il est possible de jouer autant de jetons qu'on en a en main. On peut aussi en jouer moins.

Problème : On commence avec 3 jetons. Le but est d'arriver à 5 jetons au moins après 3 parties. La probabilité de gagner à chaque étape est de $2/3$. (Si on gagne on double la mise de jetons joués, si on perd les jetons joués sont perdus).

Question : Quelle est la probabilité maximale d'arriver au but fixé, et quelle est une stratégie optimale ?

Exercice 5. Valeur de l'information.

On considère le jeu suivant de "deviner la nature". Une pièce de monnaie est tirée, avec p elle donne pile, et avec probabilité $1 - p$ face. On demande à un joueur de faire un pari sur la pièce. Le joueur, qui n'observe pas la pièce, peut donc dire soit "pile", soit "face". Le joueur reçoit g_p si le résultat de la pièce est "pile" et si l'annonce est correcte, g_f si le résultat de la pièce est "face" et si l'annonce est correcte, et 0 sinon (si le joueur s'est trompé). On suppose l'agent neutre au risque, il cherchera donc à maximiser son gain espéré.

1- Représenter ce problème de décision sous forme extensive. Quels sont les stratégies possibles ? Quels sont les paiements espérés correspondants ?

2- On suppose pour cette question uniquement que le tirage de la pièce de monnaie se fait **après** l'annonce par le joueur. Les probabilités sont les mêmes $(p, 1 - p)$. Répondre aux mêmes questions que en 1.

3- Quelle est la valeur du jeu en fonction des paramètres g_p, g_f et p ?

4- Tracer pour $g_f = g_p = 1$, puis pour $g_f = 1, g_p = 2$ la valeur $v(p)$ en fonction de p .

5- On se propose de montrer que cette valeur est une fonction convexe de p de deux manières :

5.a : Observer que la valeur est le maximum de fonctions linéaires.

5.b : On suppose que le tirage de la pièce se fait en deux étapes. Dans un **premier** tirage, la nature décide si elle va utiliser une pièce qui a probabilité p' de donner pile, ou bien p'' . Les probabilités de p' et de p'' sont de λ et de $1 - \lambda$. Dans une **seconde** étape, la nature tire le résultat de la pièce selon le paramètre p' ou p'' . Soit $p = \lambda p' + (1 - \lambda)p''$. On suppose que le joueur ne connaît pas le résultat du premier tirage de la nature. Représenter la situation sous forme extensive. Quelle est la valeur du jeu ? On suppose maintenant que le joueur connaît le premier tirage, mais pas le second. Représenter la situation sous forme extensive. Quelles sont les stratégies possibles ? Quelle est la valeur du jeu ? Parmi ces deux situations, laquelle est la plus favorable au joueur ? Conclure.

Exercice 6. Les 3 portes.

Dans un jeu télévisé, on propose à un candidat de choisir parmi 3 portes, A, B , ou C . Derrière une des portes se cache un cadeau merveilleux (voiture, voyage...). Derrière les deux autres portes se cachent un paquet de bonbons. Les probabilités que le cadeau merveilleux se cache derrière chacune des portes sont égales. Après que le candidat a fait son choix, le présentateur va ouvrir une porte, différente de celle choisie par le candidat, tirée au hasard (équiprobable) parmi celles derrière lesquelles se cache un paquet de bonbons. Le candidat a alors le choix de changer de porte, ou de conserver la même. On

ouvre ensuite la porte correspondant au choix définitif du candidat, et il reçoit le lot caché derrière cette porte.

1- Quel est l'ensemble des stratégies pour le candidat ? (attention, une stratégie dépend de toute son information, y compris du nom des portes). Combien de stratégies a-t-il ?

2- Que vaut-il mieux faire, changer de porte en deuxième étape, ou bien conserver la même ? Ou bien les paiements sont-ils égaux ?

3- Donner une stratégie optimale.

Exercice 7. Assurance

On considère la situation d'un assuré qui peut décider de souscrire un contrat d'assurance ou non. Son aversion au risque absolu est supposée constante, et de coefficient a . Le bien à assurer vaut 10000 Euros. On sait qu'avec probabilité p , un accident aura lieu et le bien sera détruit, tandis qu'avec probabilité $1 - p$ il n'y a pas de dommages.

1- On suppose compétition parfaite entre les compagnies d'assurance, qu'il n'y a pas de coûts fixes, et que les compagnies d'assurance sont neutres au risque. Quel est le prix d'un contrat permettant d'assurer le bien ?

2- Quel est le prix maximum que l'agent est prêt à payer pour assurer son bien ?

Exercice 8. Choix d'Investissement

On étudie les décisions d'investissement d'un agent averse au risque, à aversion au risque constante, et coefficient d'aversion au risque a . Cet agent a la possibilité d'investir dans un projet risqué. Si le projet est un succès, chaque part donnera un enrichissement de $S > 0$, sinon chaque part donnera un appauvrissement de $-E < 0$. La probabilité d'un succès est λ . L'agent doit décider du nombre de parts x qu'il va investir dans le projet.

1- Quel est l'utilité espérée de l'agent s'il achète x parts ?

2- Quelle est le choix optimal x^o de x en fonction des paramètres ?

3- Sous quelles conditions a-t-on $x^o > 0$?

4- Comment x^o varie-t-il avec les paramètres, et en particulier avec le degré d'aversion au risque ?

A partir de maintenant il y a n projets. Le projet i a probabilité λ_i d'être un succès, et donne un gain de $S_i > 0$ dans ce cas, et une perte $-E_i < 0$ sinon. On suppose que chaque projet est rentable en valeur espérée ($\lambda_i S_i - (1 - \lambda_i) E_i > 0$). Les risques entre les projets ne sont pas corrélés (le succès de chacun est indépendant du succès des autres).

5- Montrer que pour l'agent, la décision de la quantité investie dans le projet i est indépendante de celle investie dans le projet j (aversion au risque constante).

6- Quelle est la quantité optimale x_i^o à investir dans le projet i ?

7- Le rapport entre les quantités investies dans le projet i et j dépendent-elles du degré d'aversion au risque de l'agent ?

8- Une banque propose un produit financier qui correspond à un "pool": chaque part du produit

financier correspond à une quantité y_i investie dans chaque projet i . Si vous aviez à construire un tel produit financier, dans quelles proportions choisiriez-vous les y_i ? Comment ces proportions varient-elles en fonction des caractéristiques des projets ? Quels arguments utiliseriez-vous pour vendre ce produit aux investisseurs potentiels ?

Exercice 9. Valeur de l'information bis (théorique).

On se donne un espace fini d'états K , un espace fini d'actions A et une fonction de gain $g : K \times A \rightarrow \mathbb{R}$. Soit p une probabilité sur K et $G(p)$ le problème de décision : la nature tire k selon p sans informer le joueur qui choisit a . On définit un autre problème où le joueur est partiellement informé de la valeur de l'état. Soit P une partition de K , le jeu $G(p, P)$ se déroule comme suit: la nature tire k selon p et le joueur est informé de $P(k)$, l'élément de la partition P qui contient k .

1. Montrer que la valeur de $G(p)$ est inférieure ou égale à la valeur de $G(p, P)$.
2. En déduire que si Q est une partition plus fine que P , la valeur de $G(p, Q)$ est supérieure ou égale à celle de $G(p, P)$.

Exercice 10. Décision dynamique en horizon infini.

On se donne un espace fini d'états K , un espace fini d'actions A , une fonction de gain $g : K \times A \rightarrow \mathbb{R}$ et une fonction de transition $T : K \times A \rightarrow K$. On décrit alors le jeu suivant:

On démarre en date $t = 1$ dans un état k_1 connu du joueur qui choisit une action a_1 . L'état de date $t = 2$ est $k_2 = T(k_1, a_1)$. Le joueur choisit alors a_2 et en date $t = 3$, l'état est $k_3 = T(k_2, a_2)$... On continue ainsi indéfiniment. Lorsque la suite d'états et d'actions est $(k_1, a_1, k_2, a_2, \dots, k_n, a_n, \dots)$, le gain total du joueur est: $\sum_{n \geq 1} \beta^{n-1} g(k_n, a_n)$, où $0 < \beta < 1$ est un taux d'escompte fixé.

1. Définir les stratégies pour ce problème de décision et la fonction d'utilité (on notera $U_k(s)$ l'utilité de la stratégie s lorsque l'état initial est k). On cherche dans la suite à montrer que ce problème admet une stratégie optimale et à la construire.
2. On définit l'application $F : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^K$ suivante, pour tout $x \in \mathbb{R}^K$ et toute coordonnée k :

$$F(x)_k = \max_{a \in A} \{g(k, a) + \beta x_{T(k,a)}\}$$

Montrer que T admet un unique point fixe v .

3. Montrer qu'il existe une stratégie dont l'utilité dans le jeu d'état initial k est v_k .
4. On pose pour tout k , $W_k = \sup_s U_k(s)$. Montrer que W est un point fixe de F et conclure.
5. Pouvez vous démontrer directement l'existence d'une stratégie optimale par un argument topologique ?
6. Application. Un agent d'humeur variable peut être dans deux états : Joyeux (J) ou Déprimé (D). Il a le choix entre travailler (T) et se reposer (R). Lorsqu'il est joyeux, il est productif et s'il travaille il gagne 10, mais d'avoir trop travaillé le déprime et il passe donc dans l'état D. S'il se repose, il gagne 1 et reste joyeux. Lorsqu'il est déprimé, s'il travaille, il gagne 2 et reste déprimé, s'il se repose, il gagne 0 mais devient joyeux.

Calculer la valeur de ce problème en fonction du taux d'escompte et de l'état initial.