Théorie de la décision et théorie des jeux – TD 2
Année 2006–07 – Corrigé partiel

Troisième séance : Les exercices 0, 1, 2, 3, 4 et 12 étaient au programme.
Quatrième séance : Les exercices 8, 9, 10 et 13 (tiré de l'examen de l'an dernier) étaient au programme.

Exercice 0 (Trouver facilement les équilibres de Nash purs).
Nous avons traité l'exemple 14 du polycopié, chapitre 4. Pour trouver les équilibres de Nash en stratégies pures, il suffit d'intersecter les correspondances de meilleure réponse. Dans une matrice finie, les correspondances sont obtenues en soulignant dans chaque ligne et chaque colonne le meilleur paiement. Les cases dans lesquelles les deux paiements sont soulignés correspondent à des équilibres de Nash en stratégies pures.

Exercice 1 (Enchères).
1. Modélisation : L'ensemble des stratégies (offres) pour chaque joueur est $\mathbb{R}_+$. Etant donné son offre p_i, les offres p_j, $j \neq i$, des autres joueurs, et la meilleure offre $p^* = \max_{k=1,\dots,n} p_k$ parmi tous les joueurs, le paiement *en espérance* du joueur i est $u_i = 0$ si $p_i < p^*$, et $u_i = (v_i - p^{*,i})/N$ si $p_i = p^*$, où N est le nombre de j tels que $p_j = p^*$ et $p^{*,i} = \max_{j \neq i} p_j$ (et non pas $\max\{p_k : k = 1, \dots, n \text{ tel que } p_k \neq p^*\}$: il y a une ambiguité dans l'énoncé, mais raisonnement ci-dessous montre que c'est la première définition de $p^{*,i}$ qui est considérée).

2. "Offrir sa propre valuation est une stratégie faiblement dominante" : On fixe le joueur considéré, disons i, et les stratégies jouées par les autres, soit p_{-i}. Trois cas sont possibles selon la position de $p^{*,i}$ et v_i, et on va montrer que dans chaque cas, une action optimale consister à parier $p_i = v_i$.

- $p^{*,i} < v_i$: si $p_i < p^{*,i}$, l'utilité du joueur i est nulle ; s'il offre $p_i = p^{*,i}$, son utilité est $(v_i - p^{*,i})/N$ avec $N \geqslant 2$; enfin, si $p_i > p^{*,i}$, son utilité est $v_i - p^{*,i}$ (> 0 par hypothèse). Dans ce premier cas, le choix $p_i = v_i$ est bien un des choix optimaux possibles.
  Note : la définition alternative de $p^{*,i}$ conduirait à devoir comparer $v_i - p^{*,i}$ tel que défini ci-dessus à
  $$\frac{1}{2}\big(v_i - \max\{p_k : k = 1, \dots, n \text{ tel que } p_k \neq p_i\}\big) ,$$
  or, dans certains cas, cette dernière quantité peut être plus grande que la première...
- $p^{*,i} = v_i$: l'utilité du joueur est identiquement nulle ; lorsque $p_i < v_i = p^{*,i}$ parce que le joueur i ne remporte pas le bien, et lorsque $p_i \geqslant v_i$ parce que le prix payé est $(v_i - p^{*,i})/N = 0$.
- $p^{*,i} > v_i$: si $p_i < p^{*,i}$ (en particulier, si $p_i = v_i$) l'utilité est nulle ; si $p_i = p^{*,i}$, l'utilité est $(v_i - p^{*,i})/N < 0$; et si $p_i > p^{*,i}$, l'utilité vaut $v_i - p^{*,i} < 0$. Le choix $p_i = v_i$ est un des choix optimaux ici encore.

Dans les trois cas, on voit que $p_i = v_i$ rapporte une utilité supérieure ou égale à toute autre stratégie, et ce contre toute stratégie possible des adversaires.
Il faut encore voir, pour montrer que c'est une stratégie faiblement dominante, que contre toute action alternative $p_i \neq v_i$, il existe p_{-i} tel que $u_i(v_i, p_i) > u_i(p_i, p_{-i})$. Il suffit de prendre

un p_{-i} strictement compris entre p_i et v_i et se ramener aux premier ou troisième cas ci-dessus.

Remarque : les raisonnements qui précèdent deviennent faux lorsque les enchères se font à la meilleure offre et non plus à la deuxième meilleure offre, ... ce qui est le cas dans les salles de vente ou sur eBay !

Exercice 2 (Cournot à deux joueurs).
1. On rappelle que les ensembles de stratégies pour les joueurs sont $[a^0, b^0] = [0, +\infty]$, que l'action (quantité produite) du joueur $i = 1, 2$ est notée q_i, et que le paiement correspondant est $\pi_i = \big(\alpha - c - \beta(q_1 + q_2)\big)q_i$ (où l'on suppose, pour que le problème ait un intérêt, que $\alpha > c$). [Voir polycopié, chapitre 4, pour une présentation plus détaillée du modèle.]
Calculons la correspondance de meilleure réponse q_1^* du joueur 1, soit, $q_2 \mapsto q_1^*(q_2) = \operatorname{argmax} \pi_1(\,\cdot\,, q_2)$. Le paiement du joueur 1 est une parabole concave en q_1, qui s'annule en 0 et en $(\alpha - c)/\beta - q_2$. Le sommet de la parabole a donc pour abscisse $(\alpha - c - \beta q_2)/(2\beta)$. On en déduit (attention ! les quantités produites doivent être positives...) que la meilleure réponse est unique, $q_1^*(q_2) = \{(\alpha - c - \beta q_2)^+/(2\beta)\}$; dans ce qui suit, on va donc identifier le singleton $q_1^*(q_2)$ à l'élément qu'il contient. A cette identification près, q_1^* est une fonction décroissante de q_2.
q_1^* variant avec q_2, aucune stratégie ne domine, même faiblement, toutes les autres stratégies du joueur 1 (et par symétrie, cela vaut également pour le joueur 2). On rappelle que l'ensemble des stratégies faiblement dominantes est inclus dans l'ensemble

$$\bigcap_{q_2 \in \mathbb{R}_+} q_1^*(q_2) \ .$$

2. Les stratégies de $[0, (\alpha - c)/(2\beta)]$ ne sont pas dominées car sont elles sont chacune unique meilleure réponse à une action de l'autre joueur. Reste à voir que les stratégies de $](\alpha - c)/(2\beta), +\infty[$ sont dominées : elles le sont par $(\alpha - c)/(2\beta)$. En effet, le sommet de la parabole dont on a parlé à la question précédente est toujours à gauche du point d'abscisse $(\alpha - c)/(2\beta)$, de sorte que la demie-droite $[(\alpha - c)/(2\beta), +\infty[$ est toujours sur la branche décroissante de la parabole, quelle que soit la valeur de q_2.
Cet argument est repris dans la question suivante.

3. On élimine les stratégies dominées de manière itérative. (Voir les figures en fin de fichier !)
La question précédente montre que l'on se ramène, après la première itération, aux stratégies de $[a^1, b^1] = [0, (\alpha - c)/(2\beta)]$.
Les stratégies de $q_1^*([a^1, b^1]) = [a^2, b^2]$ sont chacune unique meilleure réponse à une stratégie possible de l'adversaire, et ne sont par conséquent pas dominées. On a $b^2 = b^1$ et $a^2 = (\alpha - c - \beta b^1)/(2\beta)$. Il reste à prouver que les stratégies qui ne sont pas dans $[a^2, b^2]$, à savoir celles de $[a^1, a^2[$ sont, elles, strictement dominées, par a^2. De même qu'à la question précédente, cela provient du fait que le sommet de la parabole définissant π_1, à q_2 fixé dans $[a^1, b^1]$, est toujours à droite de a^2. Le segment $[a^1, a^2]$ est donc sur la branche croissante de la parabole, quel que soit $q_2 \in [a^1, b^1]$.
Par récurrence, finalement, on montre que les stratégies à considérer à la k-ième itération sont données par $[a^k, b^k]$, où $a^0 = 0$, $b^0 = +\infty$, $a^k = a^{k-1}$ et $b^k = q_1^*(a^{k-1})$ si $k \geqslant 1$ est impair, $b^k = b^{k-1}$ et $a^k = q_1^*(b^{k-1})$ si $k \geqslant 2$ est pair. (Il est en effet facile de voir, toujours par récurrence, en utilisant que q_1^* est décroissante, que la suite des a^k est croissante, et que celle des b^k est décroissante.)

Le théorème des fermés emboîtés assure alors que la limite est de la forme $[a^*, b^*]$. Cette limite vérifie $a^* = q_1^*(q_1^*(a^*))$ et $b^* = q_1^*(q_1^*(b^*))$, où $0 \leqslant a^*, b^* \leqslant (\alpha - c)/\beta$. Or, $x = q_1^*(q_1^*(x))$, où $0 \leqslant x \leqslant (\alpha - c)/\beta$, est une équation linéaire (à coefficient non nul en x), qui admet donc au plus une seule solution, celle de $x = q_1^*(x)$ (équation linéaire sous la contrainte $0 \leqslant x \leqslant (\alpha - c)/\beta$). Ainsi, $a^* = b^* = (\alpha - c)/(3\beta)$, et le jeu a été résolu par élimination itérée des stratégies strictement dominées ; en particulier, le couple

$$((\alpha - c)/(3\beta), (\alpha - c)/(3\beta))$$

obtenu est l'unique équilibre de Nash du jeu.
Remarque : on aurait aussi pu se fatiguer davantage et montrer que la longueur des segments $[a^k, b^k]$ est divisée par deux à chaque itération.

Exercice 3 (Jeu de Cournot à trois joueurs). On reprend la méthodologie précédente pour le cas à trois joueurs. On a $q_1, q_2, q_3 \in [a^0, b^0] = [0, +\infty]$. Le paiement, par exemple celui du joueur 1, s'écrit $\pi_1 = \big(\alpha - c - \beta(q_1 + q_2 + q_3)\big) q_1$. Notons que par additivité du modèle, tout se passe comme si le joueur 1 jouait contre un unique autre joueur, produisant $q_2' = q_2 + q_3$. Cette observation cruciale va nous permettre d'adapter rapidement les résultats de l'exercice précédent au cas présent.
Par exemple, l'unique meilleure réponse à q_2 et q_3 est $q_1^*(q_2, q_3) = \big(\alpha - c - \beta(q_2 + q_3)\big)^+/(2\beta)$. Comme précédemment et avec les mêmes notations, de $q_2, q_3 \geqslant 0$, on montre qu'à la première itération, $b^1 = q_1^*(0,0) = (\alpha - c)/(2\beta)$ et $a^1 = 0$.
Mais $q_1^*\big([a^1, b^1] \times [a^1, b^1]\big) = [q_1^*(b^1, b^1), q_1^*(a^1, a^1)] = [0, q_1^*(0,0)] = [a^1, b^1]$ est l'ensemble des stratégies non dominées après la première itération, parce que chacune unique meilleure réponse à un couple (q_2, q_3).
Ainsi, l'intervalle ne se rétrécit plus et le jeu n'est pas résoluble par élimination itérée des stratégies strictement dominées.

Exercice 4 (Un jeu de Cournot à n joueurs).
1. Les ensembles de stratégies sont $\mathbb{R}_+$, le paiement du i-ième pêcheur, étant donné les actions (pêches) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de tous les joueurs, est $\pi_i = p\, x_i = \big(1 - (x_1 + \ldots + x_n)\big)^+ x_i$.

2. Les meilleures réponses du joueur i face aux pêches x_{-i} des autres joueurs sont données par $x_i^*(x_{-i}) = \mathbb{R}_+$ tout entier lorsque $\sum_{k \neq i} x_k \geqslant 1$. Sinon, la meilleure réponse est unique, et vaut, à l'identification près d'un singleton à l'élément dont il constitue l'ensemble,

$$x_i^*(x_{-i}) = \frac{1 - \sum_{k \neq i} x_k}{2} \ ;$$

cela se déduit des exercices précédents en groupant tous les opposants à i dans une coalition et en utilisant l'additivité du modèle.

On rappelle que $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est équilibre de Nash si et seulement si $x_i \in x_i^*(x_{-j})$ pour tout joueur j. Il est immédiat que tous les n-uples x tels que $\sum_{k \neq i} x_k \geqslant 1$ sont équilibres de Nash (et tous les paiements sont nuls, $\pi_i = 0$ pour tout i).
Il n'existe pas d'équilibre de Nash x tel que $\sum_{k \neq i} x_k \geqslant 1$ pour un certain i et $\sum_{k \neq j} x_k < 1$ pour un autre j. En effet, on aurait alors $x_j \geqslant 1 - \sum_{k \neq i, j} x_k \geqslant 1 - \sum_{k \neq j} x_k \ (> 0)$, et en particulier, $x_j \notin x_j^*(x_{-j})$, où ce dernier est le singleton décrit ci-dessus.
Il reste donc le cas où x est un équilibre de Nash tel que pour tout i, $\sum_{k \neq i} x_k < 1$. Vu la

correspondance de meilleure réponse, le système d'équations $x_i = (1 - \sum_{k \neq i} x_k)/2$ est alors vérifié pour tout i. On le résout de deux manières. La première, la plus piétonne, consiste à réécrire le système comme $A\,x = [1/2]$, où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/2 \\ 1/2 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1/2 \\ 1/2 & \cdots & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

est une matrice inversible. (On montre en effet, plus généralement, que

$$B = \begin{bmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{bmatrix}$$

est inversible si et seulement si $a \neq b$ et $a + (n-1)\,b \neq 0$.) Il existe donc un unique tel équilibre de Nash. On le cherche par tous moyens à notre disposition, par exemple en regardant si on peut l'obtenir sous forme symétrique. (Notez cependant que même dans les jeux symétriques, les équilibres de Nash ne sont pas forcément tous symétriques, par exemple, dans la guerre des sexes.) Ici, on cherche cet unique équilibre sous la forme $x = (m, \ldots, m)$ et on note que si m vérifie $m = 1/2 - 1/2(n-1)\,m$, *id est*, $m = 1/(n+1)$, alors cet x convient.
Une méthode plus efficace est d'exploiter immédiatement la symétrie, en remarquant que chaque égalité $x_i = (1 - \sum_{k \neq i} x_k)/2$ se réécrit $x_i/2 = (1-\nu)/2$, où $\nu = x_1 + \ldots + x_n$. Les x_i sont donc tous égaux, on note m leur valeur commune. m vérifie, comme précédemment, l'équation linéaire $m/2 = (1 - nm)/2$, et on retrouve $m = 1/(n+1)$.
On rappelle qu'il y a deux groupes d'équilibres de Nash, ceux qui sont tels que le paiement de chacun des joueurs est nul, et $(m, \ldots, m)$, pour lequel chaque joueur obtient un paiement de $(1 - n/(n+1))/(n+1) = 1/(n+1)^2$. Le revenu total de ce dernier est de $n/(n+1)^2$, il décroît avec n.

3. On a obtenu à la question précédente un revenu total à l'équilibre d'au plus $n/(n+1)^2$, et ce, pour $n \geqslant 2$. Dans le cas du monopole, il est immédiat que la meilleure action est $x_1 = 1/2$ (c'est elle ce qui correspond à un équilibre de Nash), et elle rapporte un paiement de $1/4$. Ce qui signifie que la formule pour le paiement total, $n/(n+1)^2$, vaut en fait pour tout $n \geqslant 1$. Les bénéfices totaux maximaux décroissent donc avec le nombre de concurrents, y compris lors du passage d'un monopole à un duopole.

Exercice 5 (Jeu de vote).
1. On suppose que les décisions de tous les joueurs sont fixées, et on s'intéresse au choix du joueur k. Ou bien son choix est décisif, c'est-à-dire que les deux projets sont *ex aequo* avant qu'il vote, auquel cas il est strictement préférable pour le joueur k de voter pour le projet qu'il préfère, parce que c'est ce dernier qui sera retenu. Ou bien les jeux sont faits, et le paiement du joueur k est indépendant de son vote.
Voter pour son propre projet est donc bien (faiblement) dominant.

2. On représente ci-dessous les utilités espérées. Un premier joueur choisit la matrice (*id est*, il choisit l'action en légende de chacune des matrices), un deuxième joueur choisit la ligne, et le dernier joueur choisit la colonne.

Le premier joueur vote a :

	a	b	c
a	$(2,\,-1,\,-1)$	$(2,\,-1,\,-1)$	$(2,\,-1,\,-1)$
b	$(2,\,-1,\,-1)$	$(1,2,1)$	$(2/3,2/3,2/3)$
c	$(2,\,-1,\,-1)$	$(2/3,2/3,2/3)$	$(-1,1,2)$

Le premier joueur vote b :

	a	b	c
a	$(2,\,-1,\,-1)$	$(1,2,1)$	$(2/3,2/3,2/3)$
b	$(1,2,1)$	$(1,2,1)$	$(1,2,1)$
c	$(2/3,2/3,2/3)$	$(1,2,1)$	$(-1,1,2)$

Le premier joueur vote c :

	a	b	c
a	$(2,\,-1,\,-1)$	$(2/3,2/3,2/3)$	$(-1,1,2)$
b	$(2/3,2/3,2/3)$	$(1,2,1)$	$(-1,1,2)$
c	$(-1,1,2)$	$(-1,1,2)$	$(-1,1,2)$

Pour voir si le premier joueur a une stratégie dominante, on compare les trois matrices pour voir si dans les neuf cases d'une des trois matrices, le premier paiement serait toujours supérieur (ou égal) au paiement de la case correspondante dans les deux autres matrices – et ce n'est pas le cas. En revanche, on note que c est faiblement dominée par a (ceci arrive à cause de l'asymétrie du problème, $a, b\,c$ ne jouent *pas* le même rôle pour les trois joueurs, à permutation des étiquettes près).
De même, en comparant les deuxièmes paiements des cases trois lignes, et ce pour les trois colonnes et les trois matrices, on voit que le deuxième joueur n'a pas d'action dominante, mais que pour lui, a est faiblement dominée par b.
Enfin, pour le troisième joueur, il n'existe pas d'action dominante non plus, mais a est faiblement dominée par c.

Enfin, le triplet des actions les plus favorables, à savoir (a, b, c) n'est pas un équilibre de Nash. En effet, la configuration $(b, b\,c)$ est préférée par le premier joueur à (a, b, c).

Exercice 6 (Ville circulaire).
On note c_i la consommation du joueur i, et $c = (c_1, \ldots, c_{100})$. A la question 1., $c \in [0,1]^{100}$, dans les questions suivantes, $c \in (\mathbb{R}_+)^{100}$. Soit γ la fonction "voisin de gauche", *id est*, $\gamma(i) = i - 1$ si $i \geqslant 2$ et $\gamma(1) = 100$.
L'utilité du i-ème joueur est $u_i(c) = c_i - c_{\gamma(i)}^2$.

1. Pour chaque joueur i, $c_i = 1$ est une stratégie dominant strictement toutes les autres stratégies $c_i \in [0,1[$. Ainsi, $(1, \ldots, 1)$ est bien un équilibre en stratégies dominantes : lorsque tous les joueurs choisissent de consommer toute l'unité, leurs paiements respectifs sont tous nuls, et si l'un dévie, alors que les autres consomment toujours autant, son paiement devient strictement négatif.

Cet équilibre n'est pas Pareto-optimal, en effet, si tous les joueurs consomment la même quantité c, ils ont chacun un paiement de $c - c^2$, qui est maximal pour $c = 1/2$, et vaut alors $1/4$. La configuration $(1/2, \ldots, 1/2)$ est donc préférée par chaque joueur à $(0, \ldots, 0)$ – qui n'est donc pas Pareto-optimale[1].

En revanche, montrons que $(1/2, \ldots, 1/2)$ est, elle, une configuration Pareto-optimale. Il s'agit de montrer que si une autre configuration $(c_1, \ldots, c_{100})$ est telle que chaque joueur obtient un paiement d'au moins $1/4$, alors $c_1 = \ldots = c_{100} = 1/2$.
Première méthode (piétonne, et qui manque de généralité) : Supposons donc que, pour tout i, $c_i - c_{\gamma(i)}^2 \geqslant 1/4$. Alors, vu $0 \leqslant c_j \leqslant 1$ pour tout j, on a les inégalités $c_i \geqslant 1/4 + 0^2$ et $c_i \leqslant \sqrt{1 - 1/4}$ pour tout i. En réinjectant une deuxième fois, on a

$$c_i \geqslant 1/4 + (1/4 + 0^2)^2 , \qquad c_i \leqslant \sqrt{1 - \sqrt{1 - 1/4}} .$$

En itérant, on montre que pour tout i et tout n, $u_n \leqslant c_i \leqslant v_n$, où les suites (u_n) et (v_n) sont définies par récurrence comme suit. $u_0 = 0$, $u_{n+1} = 1/4 + u_n^2$, $v_0 = 1$, $v_{n+1} = \sqrt{v_n - 1/4}$. Une étude de suites très classique montre que (u_n) est croissante de limite $1/2$ et que (v_n) est définie, décroissante, et de limite $1/2$. Ce qui prouve que $c_i = 1/2$ pour tout i et conclut le raisonnement.
Deuxième méthode (générale) : Tout argument maximum de la somme, éventuellement pondérée par des coefficients strictement positifs, des paiements de tous les joueurs est un équilibre de Pareto. Cela procède de la définition même des équilibres de Pareto, et d'un raisonnement par l'absurde : si tous les joueurs obtenaient au moins autant que dans la situation de l'argument maximum mais qu'un joueur obtenait strictement plus, au vu de la pondération par des coefficients strictement positifs, c'est que l'argument maximum n'en eût pas été un. Ici, l'étude de $c \mapsto c - c^2$ montre que la maximisation de la somme (sans pondération) des paiements conduit à ce que chaque joueur doit consommer $c_i = 1/2$. Par conséquent, $(1/2, \ldots, 1/2)$ est un équilibre de Pareto.

2. Si i et j ne sont pas voisins, leurs voisins de gauche consomment 1, et i et j doivent consommer plus que 1 pour avoir une utilité strictement positive, ce qui est impossible. Supposons donc que i et j sont voisins, par exemple que i est le voisin de gauche de j. Alors i doit consommer plus que 1 pour avoir une utilité strictement positive, puisque son voisin de gauche consomme 1. On note ceci $c_i = 1 + \alpha$, où $\alpha > 0$. C'est donc que j lui reverse une partie $\alpha' \geqslant \alpha$ de ses ressources. j dispose donc encore de $1 - \alpha'$, et son utilité maximale est $1 - \alpha' - (1 + \alpha)^2 < 0$, ce qui contredit le fait que les deux joueur doivent avoir simultanément une utilité strictement positive.

3. Notons que la partie "à moins que ..." a été prouvée à la question 1.
Soit G l'ensemble des 100 habitants. Soit $S \subsetneq G$ un sous-ensemble des villas tel que pour tout $i \in S$, $u_i > 0$. Soit $E = \{i \in S : \gamma(i) \notin S\}$ et $F = S \setminus E$.
E est non-vide car $S \neq G$. Ainsi, soit $i \in E$. $u_i > 0$, avec $u_i = c_i - c_{\gamma(i)}^2 = c_i - 1$, car le voisin de gauche de i n'est pas dans la coalition et consomme donc 1. Nécessairement, $c_i > 1$.
Puisque la consommation totale ne peut pas excéder la quantité disponible initialement, on

1. Rappelons qu'un optimum de Pareto est une situation jugée, par tous les agents, préférable à toute autre situation (ou au moins aussi bonne)

a $\sum_{k\in G} c_k \leqslant 100$. On ne peut pas avoir $c_k \geqslant 1$ pour tout k, puisqu'alors, avec $c_i > 1$, on aurait $\sum_{k\in G} c_k > 100$. D'où l'existence de $j \in G$ tel que $c_j < 1$. j est nécessairement dans la coalition (car sinon il consommerait 1) et n'est pas dans E (car sinon il consommerait strictement plus que 1, comme prouvé ci-dessus). Ainsi, ce j est dans $F = S \setminus E$. On a alors $u_j = c_j - c^2_{\gamma(j)} > 0$ et $c_j < 1$, donc $c_{\gamma(j)} < 1$, et nécessairement, à nouveau, $\gamma(j) \in F$. Ce raisonnement valant pour tout $j \in F$, on aurait, en itérant, que tout élément de F a son voisin dans F, soit $F = G$, alors même que $F \subsetneq S \subsetneq G$. La contradiction conclut.

Exercice 7 (Vacances à la plage).
1. Les stratégies possibles sont, pour le joueur i, de choisir la plage A ou la plage B, ce que l'on note par $c_i = 1$ et $c_i = 0$ respectivement.
L'utilité qui en découle pour le joueur i, étant donné la configuration de choix $c = (c_1, \ldots, c_n)$, égale

$$u_i(c) = c_i\, f_A\left(\sum_{j=1}^{n} c_j\right) + (1-c_i)\; f_B\left(n - \sum_{j=1}^{n} c_j\right) .$$

2. Par définition, une situation c est un équilibre de Nash si aucun individu n'a intérêt à s'écarter de la règle alors que les autres individus continuent, eux, à suivre la règle. Autrement dit, si l'on a une situation donnée c, avec $a = \sum_{i=1,\ldots,n} c_i > 0$ touristes en A et $b = n - a$ touristes en B, aucun des touristes présents sur la plage A n'a intérêt à passer en B, les autres ne bougeant pas : $f_A(a) \geqslant f_B(b+1)$. Et de même, si $b > 0$, aucun des touristes présents sur la plage B n'a intérêt à passer sur la plage A : $f_B(b) \geqslant f_A(a+1)$.
(Notez bien que quand $a = 0$ ou $b = 0$, seule une des deux équations a besoin d'être vérifiée, l'autre étant sans objet.)
Réciproquement, une telle situation c correspond bien à un équilibre de Nash. Par conséquent, si l'on parvient à résoudre le problème donné par ces inéquations, on aura trouvé tous les équilibres de Nash de ce jeu.

3. Les fonctions f_A et f_B étant décroissantes, $f_A(a) \geqslant f_A(a+1)$ et $f_B(b) \geqslant f_B(b+1)$. Ainsi, si l'on a une situation c telle que $f_A(a) = f_B(b)$, alors $f_B(b) \geqslant f_A(a+1)$ et $f_A(a) \geqslant f_B(b+1)$, ce qui, selon la question précédente, caractérise un équilibre de Nash.
Remarque : la condition $f_A(a) = f_B(b)$ est suffisante, elle n'est pas nécessaire en général.

4. $a = 0$ ou $b = 0$ ne correspondent pas à des équilibres de Nash, car $f_A(a+1) = f_A(1) > f_B(100) = f_B(b)$ dans le premier cas, et $f_B(b+1) = f_B(1) > f_A(100) = f_A(a)$ dans le second cas. Ainsi, s'il y a équilibre de Nash, on a $a > 0$ et $b > 0$.
Cherchons les équilibres de Nash c tels que $a, b > 0$. Selon la question 3., et en écrivant $a = 100 - b$, on considère donc l'équation $b^2 = 5\,(100-b)$, qui équivaut à $(b-20)\,(b+25) = 0$, de solution dans $\mathbb{N}^*$ $b = 20$. Les c tels que $a = 80$ et $b = 20$ sont donc des équilibres de Nash. Mais les a-t-on tous de la sorte ?
Selon la question 2., c (avec $a, b > 0$) est équilibre de Nash si et seulement si b vérifie le système d'inéquations $b^2 \geqslant 5\,(100-b-1)$ et $5\,(100-b) \geqslant (b-1)^2$. La première inéquation se réécrit $(b-20)\,(b+25) \geqslant -5$ et admet pour solution dans $\mathbb{N}^*$ les entiers supérieurs ou égaux à 20. La seconde équivaut à $b^2 + 3b - 499 \leqslant 0$, ou $(b-20)\,(b+23) \leqslant 39$, qui a pour solution dans $\mathbb{N}^*$ les entiers inférieurs ou égaux à 20.
Seul $b = 20$ convient et la satisfaction de l'égalité de la question 3. nous avait bien conduit à

décrire tous les équilibres de Nash. (On avait besoin de savoir que l'on cherchait $b = 20$ pour savoir comment factoriser nos inéquations.)

Exercice 8 (Nash).
1. On considère le jeu suivant, où x (respectivement y) désigne la probabilité que le joueur-ligne (respectivement colonne) joue l'action qui indexe la première ligne (respectivement, la première colonne).

	y	$1-y$
x	$(5,4)$	$(3,3)$
$1-x$	$(3,3)$	$(7,8)$

Méthode 1 (Intersection des meilleures réponses) : On utilise la caractérisation d'un équilibre de Nash en terme de meilleures réponses, la stratégie mixte de chaque joueur est meilleure réponse à celle de l'autre joueur.
Le paiement du joueur-ligne est

$$\pi_\ell = 5xy + 3(1-x)y + 3x(1-y) + 7(1-x)(1-y) = 6xy - 4x - 4y + \square = (6y-4)x + \square \ ,$$

où $\square$ désigne des constantes qu'il n'est pas nécessaire de calculer (ces constantes peuvent dépendre de y, qui est fixé pour le calcul de x). La correspondance de meilleure réponse x^* à y est ainsi donnée par

$$x^*(y) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } y < 2/3, \\ [0,1] & \text{si } y = 2/3, \\ \{1\} & \text{si } y > 2/3. \end{cases}$$

De même, le paiement du joueur-colonne est

$$\pi_c = 4xy + 3(1-x)y + 3x(1-y) + 8(1-x)(1-y) = 6xy - 5y - 5x + \square = (6x-5)y + \square \ ,$$

et l'on en déduit la correspondance de meilleure réponse

$$y^*(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } x < 5/6, \\ [0,1] & \text{si } x = 5/6, \\ \{1\} & \text{si } x > 5/6. \end{cases}$$

On regarde ensuite les intersections entres les deux courbes de meilleure réponse pour déterminer les trois équilibres de Nash, à savoir $(x,y) = (0,0)$, $(5/6, 2/3)$, et $(1,1)$. (Voir figure à la fin du corrigé.)
Méthode 2 (Principe d'indifférence) : On recherche d'abord les équilibres de Nash qui ne sont pas complètement mixtes. Or, si un joueur joue en stratégies pures, une étude directe de la matrice des paiements (cf. les paiements du joueur-ligne sont strictement différents d'une ligne à l'autre, et de même, pour le joueur-colonne) montre que l'(unique) meilleure réponse de l'autre joueur est en stratégies pures également – et on retrouve les équilibres $(0,0)$ et $(1,1)$.
On s'intéresse alors aux équilibres de Nash de la forme (x,y), $x,y > 0$, et on les obtient en utilisant la technique d'indifférence sur le support. (Toutes les actions sont dans les supports ici.) La stratégie y du joueur-colonne doit être telle que le joueur-ligne est indifférent entre ses deux actions, à savoir,

$$5y + 3(1-y) = 3y + 7(1-y) \ , \qquad y = 2/3 \ .$$

De même, la stratégie x du joueur-ligne vérifie

$$4x + 3(1-x) = 3x + 8(1-x) \ , \qquad x = 5/6 \ .$$

On retrouve l'équilibre $(5/6, 2/3)$.
En fait, le principe d'indifférence permet d'éviter le traçage dans les jeux 2×2 : un point fixe complètement mixte est nécessairement situé au niveau de basculement dans les meilleures réponses.

2. On considère maintenant :

	y	$1-y$
x	$(2,-2)$	$(1,-1)$
$1-x$	$(3,-3)$	$(4,-4)$

Méthode 0 (Elimination itérée des stratégies dominées) : On se souvient que le support des équilibres de Nash résiste à l'élimination itérée des stratégies (mixtes) strictement dominées. Or ici, la première action du joueur-ligne est strictement dominée, et ensuite, la deuxième action du joueur-colonne est strictement dominée dans le jeu résultant. Puisque dans tout jeu fini il existe toujours un équilibre de Nash, au moins en stratégies mixtes, c'est ici que cet équilibre est en fait en stratégies pures et que c'est $(x, y) = (0, 1)$.
Méthode 1 : Le paiement du joueur ligne est

$$\pi_\ell = 2xy + 3(1-x)y + x(1-y) + 4(1-x)(1-y) = 2xy - 3x + \square = (2y-3)x + \square \ ;$$

$x^*(y) = \{0\}$ est la meilleure réponse à tout y (vu $2y - 3 < 0$).
Ici, on n'a donc pas besoin de calculer toute la correspondance de meilleure réponse du joueur colonne. Il suffit d'étudier son paiement contre $x = 0$; il vaut $\pi_c(0, y) = -3y - 4(1-y)$, il est (uniquement) maximisé pour $y = 1$.
On a ainsi retrouvé l'équilibre $(0, 1)$. (Pour mémoire, on trace à la fin du corrigé les deux correspondances de meilleure réponse dans le cas de ce jeu. Comme $\pi_c = (-2x+1)y + \square$, on a $y^*(x) = \{1\}$ lorsque $x < 1/2$, $[0,1]$ pour $x = 1/2$ et $\{0\}$ quand $x > 1/2$.)
Méthode 2 : En appliquant le principe d'indifférence, on peut rechercher un éventuel équilibre (x, y) dans lequel le joueur-ligne jouerait une stratégie mixte $x \in]0,1[$. Le principe d'indifférence se traduit par l'indifférence du joueur-ligne entre ses deux actions, *id est*,

$$2y + (1-y) = 3y + 4(1-y) \ , \qquad \text{soit } y = 3/2 > 1 \ !$$

La contradiction montre qu'il n'y a pas d'équilibre où le joueur ligne joue avec $x \in]0,1[$. Il joue donc en stratégies pures, et l'examen de la matrice nous indique que le joueur-colonne joue alors également en stratégies pures, et que seul l'équilibre $(0, 1)$ existe.

3. Finalement, on considère :

	y	$1-y$
x	$(1,0)$	$(1,2)$
$1-x$	$(1,1)$	$(0,0)$

Méthode 0 : Non applicable ! (Certes la deuxième action du joueur-ligne est dominée, mais *faiblement* et non pas strictement.)
Méthode 1 : Les paiements respectifs du joueur-ligne et du joueur-colonne sont

$$\begin{aligned} \pi_\ell &= xy + (1-x)y + x(1-y) = -xy + x + \square = (-y+1)x + \square \ , \\ \pi_c &= (1-x)y + 2x(1-y) = (1-3x)y + \square \ , \end{aligned}$$

de sorte que les meilleures réponses sont $x^*(y) = \{1\}$ si $y < 1$ et $x^*(y) = [0,1]$ si $y = 1$; et

$$y^*(x) = \begin{cases} \{1\} & \text{si } x < 1/3, \\ [0,1] & \text{si } x = 1/3, \\ \{0\} & \text{si } x > 1/3. \end{cases}$$

Il apparaît donc qu'il existe une infinité d'équilibres : $(1,0)$ et les couples de stratégies $(x,1)$, où $x \in [0,1/3]$. (Voir troisième figure en dernière page du corrigé.)

Méthode 2 : Utilisons le principe d'indifférence pour chercher les équilibres mixtes (x,y) où l'un au moins des joueurs ne joue pas une stratégie pure.

Supposons $x \in]0,1[$ (*id est*, les deux actions du joueur ligne sont dans le support de sa composante de l'équilibre de Nash) et écrivons qu'il est indifférent entre ses deux actions à l'équilibre (x,y),

$$y + (1-y) = y \ , \qquad y = 1 \ .$$

Les équilibres sont donc de la forme $(0,y)$, $(1,y)$ ou $(x,1)$. (Il ne peut donc pas y avoir d'équilibre complètement mixte.)

Eliminons encore des possibilités en regardant ce qui arrive lorsque le joueur-colonne joue une stratégie mixte $y \in]0,1[$ à l'équilibre (x,y). L'indifférence entre ses deux actions s'écrit $1-x = 2x$, soit $x = 1/3$. Mais cela n'est pas possible vu les couples éliminés ci-dessus. C'est donc que le joueur-colonne joue en stratégies pures. Il ne reste donc plus que les équilibres de la forme $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$, ou $(x,1)$ – c'est-à-dire $(0,0)$, $(1,0)$ et les $(x,1)$, $x \in [0,1]$. L'examen de la matrice montre que $y = 0$ nécessite $x = 1$. Pour les $(x,1)$: le paiement du joueur-ligne vaut 1 quel que soit x, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de déviation profitable pour lui. Pour que $(x,1)$ soit un équilibre de Nash, il faut et il suffit donc qu'il n'y ait pas non plus de déviation profitable pour le joueur-colonne, ce qui s'écrit $1-x \geqslant 2x$, soit $x \leqslant 1/3$.

On a bien retrouvé, avec un peu plus de peine, les mêmes résultats qu'avec la méthode précédente.

Moralité : il faut être prudent avec le principe d'indifférence, surtout lorsqu'il y a des équilibres non complètement mixtes. Cela arrive ici parce que l'on a plusieurs stratégies pures donnant le paiement maximum au joueur-ligne (qui, partant, est indifférent entre ces stratégies, alors même que son adversaire joue en stratégies pures). Il convient donc toujours de regarder attentivement la matrice et de parcourir exhaustivement tous les supports possibles (et pas seulement les couples de stratégies complètement mixtes ou complètement pures).

Exercice 9 (Le jeu de l'inspection).

1. On peut représenter le jeu sous forme normale avec les paiements suivants :

	Travaille (T)	Paresse (P)
Inspecte (I)	$(v-h-w,\ w-g)$	$(-h,\ 0)$
N'inspecte pas (N)	$(v-w,\ w-g)$	$(-w,\ w)$

2. (Il suffit en fait de supposer $0 < h, g < w$ et $v > 0$.) Il est clair qu'aucun couple de stratégies pures n'est un équilibre de Nash : dans chacune des situations, un (et un seul) deux joueurs a un intérêt strict à dévier (en (I,T), le patron a un intérêt strict à ne pas conduire d'inspection, son employé ne déviant pas et continuant à travailler ; en (N,T), l'employé a un intérêt strict à paresser ; en (N,P), le patron a un intérêt strict à inspecter ; en (I,P), l'employé a un intérêt strict à travailler ; notez le cycle obtenu, en le représentant avec des flèches sortantes, on a une illustration graphique de la non-existence d'équilibres de Nash en stratégies pures ici).

Au passage, on a également prouvé que l'(unique) meilleure réponse à une stratégie pure est

toujours une stratégie pure.
Il n'existe donc que des équilibres de Nash (x, y) complètement mixtes (où x désigne la probabilité d'inspecter et y celle de travailler), et au moins un tel équilibre (puisque nous sommes dans un jeu fini). En utilisant l'indifférence sur les éléments du support (voir exercice précédent), on a que (x, y) satisfait le système

$$\begin{aligned}(v-h-w)\,y+(-h)\,(1-y) &= (v-w)\,y+(-w)\,(1-y)\ ,\\ (w-g)\,x+(w-g)\,(1-x) &= 0\,x+(w)\,(1-x)\ ,\end{aligned}$$

soit, $x = g/w$, et $-h = -w\,(1-y)$, $y = 1 - h/w$.
Le seul équilibre est donc $(x, y) = (g/w, 1 - h/w)$, il est complètement mixte.
Lorsque h augmente, la probabilité de travailler de l'employé diminue (il sait en effet que l'inspection coûtera plus cher à son patron). Lorsque g augmente, la probabilité d'inspecter du patron augmente (il sait que l'employé a moins envie de travailler et qu'une inspection peut alors s'avérer plus fructueuse). Notons que la probabilité de travailler y est indépendante de la désutilité du travail $g < w$, tout comme la probabilité d'inspecter x est indépendante du coût $h < w$ de l'inspection.

Exercice 10 (Course au brevet).
Le paiement du joueur $i = 1, 2$ est donné par la différence entre le montant investi $x_i \in [0, V]$ et la subvention éventuelle. Par exemple, le paiement du joueur $i = 1$ vaut

$$\pi_1(x_1, x_2) = -x_1 + V\,\mathbb{I}_{x_1>x_2} + (V/2)\,\mathbb{I}_{x_1=x_2}\ .$$

Le jeu est symétrique, on a $\pi_2(x_1, x_2) = \pi_1(x_2, x_1)$. (Voir l'exercice suivant pour plus de détails sur les jeux symétriques.)
Remarque : dans l'extension mixte de ce jeu (où chacun des joueurs choisit une probabilité sur $[0,V]$), il existe au moins un équilibre de Nash. Cela procède du théorème de Nash, du fait que l'ensemble des probabilités sur le compact métrique $[0,V]$ est lui-même convexe et compact, et que les paiements sont linéaires et continus en les probabilités jouées. (Ce sont des résultats d'analyse fonctionnelle, les mots-clés sont «topologie faible» et «théorème de Prohorov» ; ils dépassent de loin les frontières de ce cours !) Mais, comme le montre la question suivante, il n'y a pas d'équilibre de Nash en stratégies pures...

1. Si une entreprise a investi strictement plus que l'autre, elle a intérêt à diminuer légèrement son investissement tout en restant l'entreprise investissant le plus. C'est une déviation unilatérale profitable. Donc si équilibre en stratégies pures il y a, il est forcément tel que les deux firmes investissent de façon égale. Si elles investissent strictement moins que V, l'une des deux a intérêt à investir un peu plus, de façon à ne pas partager la subvention (elle investit ε de plus et passe d'une subvention $V/2$ à V). C'est une déviation unilatérale profitable. Si elles investissent toutes les deux V, elles ont chacune une utilité égale à $V/2 - V < 0$, et chacune des deux a intérêt à se retirer en investissant 0, ce qui lui permet d'avoir une utilité nulle. On en conclut qu'il n'y a pas d'équilibre de Nash en stratégies pures.
Remarque : ici, la notion de meilleure réponse n'est pas clairement définie. Que serait en effet la meilleure réponse du joueur 1 à l'investissement $x_2 < V$ du joueur 2 ? Ce serait un x_1 strictement plus grand que x_2, pris cependant le plus petit possible. Or, l'infimum auquel on pense est égal à x_2 et ne convient pas ! En revanche, on peut définir, pour ε fixé, une notion d'ε-meilleure réponse. Une ε-meilleure réponse à x_2 est par exemple, pour $x_2 < V$,

$x_1 = \min\{x_2 + \varepsilon, V\}$.

2. Précisons au préalable comment est obtenue l'extension mixte. Si ν_1, ν_2 sont deux probabilités sur $[0,V]$, on définit (avec des notations évidentes, et grâce au théorème de Fubini)

$$\pi_1(\nu_1,\nu_2) = \int_{[0,V]^2} \pi_1(x,y)\,\mathrm{d}\nu_1(x)\,\mathrm{d}\nu_2(y) = \int_{[0,V]} \pi_1(\nu_1,y)\,\mathrm{d}\nu_2(y) \ .$$

Prouvons que le choix par chaque joueur de la loi uniforme μ sur $[0, V]$ forme un équilibre de Nash. Par symétrie, il suffit de montrer que le second joueur n'a aucune déviation profitable contre le choix de μ pour le premier joueur. On montre même plus fort, que contre ce choix, le joueur 2 est indifférent entre toutes ses stratégies (pures, donc mixtes) ; précisément, on montre que, pour tout $y \in [0,V]$,

$$\pi_2(\mu, y) = 0 \ .$$

Cela découle du calcul suivant,

$$\pi_2(\mu, y) = \mathbb{E}\left[\pi_2(U, y)\right] = \int_0^V \left(-y + V\mathbb{I}_{y>x} + \frac{V}{2}\mathbb{I}_{y=x} \right) \frac{\mathrm{d}x}{V} = -y + V\,\frac{y}{V} = 0 \ .$$

Puis, par intégration, pour toute probabilité ν_2,

$$\pi_2(\mu, \nu_2) = \int_{[0,V]} \pi_2(\mu,y)\,\mathrm{d}\nu_2(y) = 0 \ .$$

On a donc montré qu'en jouant une loi uniforme sur $[0,V]$, un joueur rend l'autre joueur indifférent entre toutes les stratégies pures, et donc aussi entre toutes les stratégies mixtes, d'où l'équilibre de Nash annoncé.

Exercice 11 (Jeu symétrique). On rappelle que la correspondance de meilleure réponse R de $X \times X$ dans $X \times X$ est définie par

$$R(x,y) = \left(\operatorname*{argmax}_{x' \in X} g_1(x',y) \right) \times \left(\operatorname*{argmax}_{y' \in X} g_2(x,y') \right)$$

(où les maxima sont atteints par continuité sur un compact). Par symétrie du jeu, on a que les meilleures réponses à un couple (x,x) prennent une forme particulière,

$$R(x,x) = \left(\operatorname*{argmax}_{x' \in X} g_1(x',x) \right)^2 \ .$$

On définit alors la correspondance F de X dans X par

$$F(x) = \pi(R(x,x)) = \operatorname*{argmax}_{x' \in X} g_1(x',x) \ ,$$

où π est la projection selon la première composante. (On s'écarte du chemin proposé par l'énoncé, mais de très peu : ce dernier propose simplement de considérer $\pi(R(x,x)) \times \pi(R(x,x))$.) On montre maintenant que F satisfait aux conditions du théorème de Kakutani, ce qui montrera l'existence de x^* tel que $x^* \in F(x^*)$ – alors, $(x^*,x^*) \in R(x^*,x^*)$ et (x^*,x^*) sera bien un équilibre, symétrique, du jeu G.

X est, comme requis, un ensemble convexe compact non-vide de $\mathbb{R}^n$. F est une correspondance de X vers X telle que pour tout $x \in X$, $F(x)$ est non-vide (par continuité sur un compact, voir plus haut) et convexe ; la convexité de chaque $F(x)$ procédant de la concavité de $g_1(\,\cdot\,,x)$ pour chaque x. Il reste à prouver que le graphe de F est fermé. A cet effet, on prend deux suites dans X, soit $x_n \to x$ et $y_n \to y$, telles que $x_n \in F(y_n)$ pour tout n ; et il s'agit de montrer que $x \in F(y)$. On fixe $z \in X$; pour tout n, puisque $x_n \in F(y_n)$,

$$g_1(z,y_n) \leqslant g_1(x_n,y_n) \ ,$$

de sorte qu'en passant à la limite et en utilisant la continuité de g_1, il vient $g_1(z,y) \leqslant g_1(x,y)$. Ceci valant pour tout $z \in X$, c'est bien que x réalise le maximum de $g_1(\,\cdot\,,y)$, *id est*, $x \in F(y)$.

Exercice 12 (Jeu à somme nulle). On note, pour la partie A de l'exercice, que le jeu G admet un équilibre (de Nash, appelé ici également équilibre minmax pour des raisons qui deviendront claires à la question A3), par le théorème de Glicksberg-Nash.

A1. Attention ! Avant le résultat de la question A3, on ne sait pas si les inf sup (respectivement, sup inf) sont des min max (respectivement, max min). Les hypothèses de continuité et compacité indiquent certes que tout supremum ou infimum est un maximum ou un minimum, mais on ne sait rien quand on "enchaîne" deux tels opérateurs...
Ici, on écrit que pour tous $s \in S$ et $t \in T$,

$$g(s,t) \leqslant \sup_{t' \in T} g(s,t') \ ,$$

on passe à l'infimum en $s \in S$ dans les deux membres,

$$\inf_{s \in S} g(s,t) \leqslant \inf_{s \in S} \max_{t' \in T} g(s,t') \ ,$$

et on conclut en passant au supremum dans le membre de gauche (le membre de droite est constant).

A2. Par définition, (x,y) est un équilibre de G si et seulement s'il n'y a déviation profitable ni pour le premier, ni pour le second joueur. Ce qui s'écrit, respectivement, en se souvenant que $g_1 = -g_2 = g$,

$$\forall s \in S, \quad g(x,y) \geqslant g(s,y) \quad \text{et} \quad \forall t \in T, \quad -g(x,y) \geqslant -g(x,t) \ ;$$

on obtient bien l'inégalité proposée.

A3. On montre la première inégalité, la deuxième se prouvant de manière similaire. Par A2 (et vu l'existence d'un équilibre), $g(x,y) \geqslant g(s,y)$ pour tout $s \in S$, de sorte qu'en passant au supremum en s, $g(x,y) = \sup_{s \in S} g(s,y)$; et $\sup_{s\in S} g(s,y)$ est en particulier plus grand que $\inf_{t \in T} \sup_{s \in S} g(s,t)$.
En utilisant l'inégalité A1 (vraie pour tous les jeux), on a bien que pour tout $(x,y) \in E$,

$$g(x,y) = \inf_{t \in T} \sup_{s \in S} g(s,t) = \sup_{s \in S} \inf_{t \in T} g(s,t) = v = \min_{t \in T} \max_{s \in S} g(s,t) = \max_{s \in S} \min_{t \in T} g(s,t) \ .$$

Il est facile de trouver un jeu, même à somme nulle, tel que l'égalité du minmax et du maxmin ne soit pas réalisée (et pour lequel il n'est donc pas possible de définir ce que serait la valeur) ; un jeu fini suffit, pour peu qu'on n'autorise pas le recours aux stratégies mixtes, par exemple "matching pennies", de matrice de paiements

	g	d
h	$(-1,1)$	$(1,-1)$
b	$(1,-1)$	$(-1,1)$

Ici, le minmax vaut 1, alors que le maxmin vaut -1. (On pourrait construire de nombreux contre-exemples en omettant à chaque fois une et seule hypothèse de l'énoncé, la compacité de S, la (quasi)-concavité en la première variable, etc.)

A4. Il suffit de faire appel à la question A2, en remarquant que (grâce à A3) $g(x,y) = v$.

B1. Le joueur 1 garantit une quantité quand il est certain de pouvoir l'obtenir quelles que soient les actions de son adversaire ; il la défend quand contre chacun des coups de son adversaire, il est capable de répondre de telle sorte qu'il gagne au moins cette quantité. Tout réel garanti est défendu, mais la réciproque est fausse en général.
On montre que $\alpha = \sup_{s\in S} \inf_{t\in T} g(s,t)$; la preuve que $\beta = \inf_{t\in T} \sup_{s\in S} g(s,t)$ est similaire, et de même qu'à la question A1, on montre alors directement que dans tout jeu, $\alpha \leqslant \beta$.
On commence par noter que par définition, tout réel garanti d est plus petit que $\varepsilon + \sup_{s\in S} \inf_{t\in T} g(s,t)$, et ce, pour tout $\varepsilon > 0$. Cela assure l'inégalité $\alpha \leqslant \sup_{s\in S} \inf_{t\in T} g(s,t)$. Or, $d = \sup_{s\in S} \inf_{t\in T} g(s,t)$ peut être garanti, il suffit de prendre, à ε fixé, $s = s_\varepsilon$, un argsup à ε près de $\sup_{s\in S} \inf_{t\in T} g(s,t)$.

B2. Le joueur 2 garantit d' si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $t \in T$ tel que pour tout $s \in S$, $g_2(s,t) = -g(s,t) \geqslant d' - \varepsilon$; α' est le plus grand tel réel d' garanti, par ce qui précède,

$$\alpha' = \sup_{s\in S} \inf_{t\in T} (-g(s,t)) = \sup_{s\in S} \left(-\sup_{t\in T} g(s,t) \right) = -\inf_{s\in S} \sup_{t\in T} g(s,t) = -\beta \ .$$

C'est-à-dire que le joueur 2 garantit $-\beta$.
On définit β' similairement à β, et on montre de même que $\beta' = -\alpha$.

On a donc que le joueur 1 garantit $d \neq \alpha$ si et seulement si $d < \alpha = -\beta'$, si et seulement si $\eta' < -d$, si et seulement si le joueur 2 ne défend pas $-d$.

B3. Le joueur 1 garantit v et le joueur 2 garantit $-v$. A $\varepsilon > 0$ fixé, on prend s_ε donné par la définition du fait que v est garanti par le joueur 1, t_ε donné par le fait que le joueur 2 garantit $-v$. On obtient alors la propriété proposée.
Réciproquement, la propriété proposée montre que $\alpha \geqslant v$, $\alpha' \geqslant -v$; or, $\alpha \leqslant \beta = -\alpha'$, de sorte qu'on obtient $\alpha = \beta = \alpha' = v$; et le jeu admet v pour valeur.

B4. On a

$$\alpha = \sup_{s\in\mathbb{N}} \inf \{u_s, u_{s+1}, u_{s+2}, \ldots\} = \liminf u_n \ ,$$

et de même, $\beta = \limsup u_n$. Le jeu a donc une valeur si et seulement si la suite (u_n) converge ; auquel cas, la valeur est cette limite.

Exercice 13 (Partage de taxis).
A la sortie de l'aéroport, trois personnes J_1, J_2, J_3 veulent prendre le taxi. Deux taxis A et B sont disponibles. Les trois voyageurs sont disposés à partager un taxi mais préfèrent le prendre seules ; le paiement d'un joueur est 1 s'il est seul dans un taxi et 0 sinon. Ecrire ce jeu sous forme normale, en trouver les équilibres purs, montrer qu'il n'existe pas d'équilibre dans lequel un joueur joue en stratégies pures et les deux autres en stratégies mixtes, et en

déduire tous les équilibres du jeu.

J_1 choisit la ligne, J_2 la colonne et J_3 la matrice (de gauche pour A et celle de droite pour B) ; on note pour chaque joueur p_A, q_A, r_A sa probabilité respective de choisir A,

	q_A	$1-q_A$
p_A	$(0,0\,0)$	$(\underline{0},\underline{1}\,\underline{0})$
$1-p_A$	$(\underline{1},\underline{0}\,\underline{0})$	$(\underline{0},\underline{0}\,\underline{1})$

r_A

	q_A	$1-q_A$
p_A	$(\underline{0},\underline{0}\,\underline{1})$	$(\underline{1},\underline{0}\,\underline{0})$
$1-p_A$	$(\underline{0},\underline{1}\,\underline{0})$	$(0,0\,0)$

$1-r_A$

Avec la technique habituelle de soulignement des meilleures réponses (voir exercice 0), on obtient six équilibres de Nash en stratégies pures.
Pour montrer qu'il n'existe pas d'équilibre dans lequel un joueur joue en stratégies pures et les deux autres en stratégies mixtes, on note par symétrie du jeu qu'il suffit de montrer qu'il n'existe pas d'équilibre de la forme $(p_A, q_A, 1)$ où $p_A, q_A \in]0{,}1[$. Cela découle du fait que dans le jeu réduit aux deux premiers joueurs, à action A fixée du troisième joueur,

	q_A	$1-q_A$
p_A	$(0,0)$	$(0,1)$
$1-p_A$	$(1,0)$	$(0,0)$

il n'existe pas d'équilibre complètement mixte. Les relations d'indifférence s'écriraient en effet $p_A = 0$, $q_A = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $p_A, q_A \in]0{,}1[$.
Les équilibres du jeu sont donc complètement purs (déjà déterminés), de la forme une stratégie mixte et deux stratégies pures, ou complètement mixtes. Déterminons ces derniers, qui sont caractérisés par les relations d'indifférence suivantes,

$$\begin{aligned}(1-q_A)(1-r_A) &= q_A r_A \ ,\\ (1-p_A)(1-r_A) &= p_A r_A \ ,\\ (1-p_A)(1-q_A) &= p_A q_A \ ,\end{aligned}$$

système qui se réécrit

$$\begin{aligned}q_A + r_A = 1 \ ,\\ p_A + r_A = 1 \ ,\\ p_A + q_A = 1 \ ,\end{aligned}$$

soit $p_A = q_A = r_A = x$ tel que $2x = 1$, $x = 1/2$. $(1/2, 1/2, 1/2)$ est le seul équilibre complètement mixte.
Il reste à déterminer les équilibres de la forme «un joueur joue une stratégie mixte, les deux autres joue des stratégies pures». Il est clair qu'alors les deux joueurs jouant en pures jouent des stratégies différentes ; le cas générique à étudier est donc de la forme $(x, 1, 0)$, qui est, pour tout $x \in]0{,}1[$, un équilibre de Nash. En effet, le joueur 1 est indifférent entre ses actions, et aucun des joueurs 2 et 3 n'a intérêt à dévier ; en le faisant, il aurait un paiement nul, alors que (vu $x \in]0{,}1[$), il a un paiement strictement positif avec $(x, 1, 0)$. Finalement, par symétrie, tous les $(x, 1, 0)$, $x \in]0{,}1[$ (et même $x \in [0{,}1]$ vu les équilibres purs), et toutes leurs permutations, sont équilibres de Nash. En conclusion, un triplet avec un mixte et deux purs est équilibre si et seulement si les deux stratégies pures diffèrent.