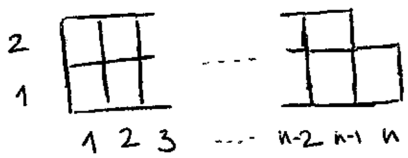
Exercice 1.

Situation fondamentale :

échiquier $2 \times n$ où la case $(2,n)$ a déjà été ôtée.

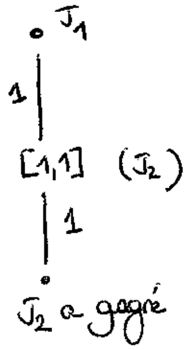


le joueur qui a la main est perdant

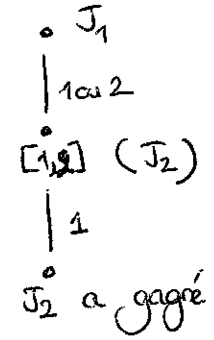
Exercice 2.

Légende $[i,j]$: le joueur a le choix entre un ensemble de taille i et un autre de taille j ($i,j \geq 1$).

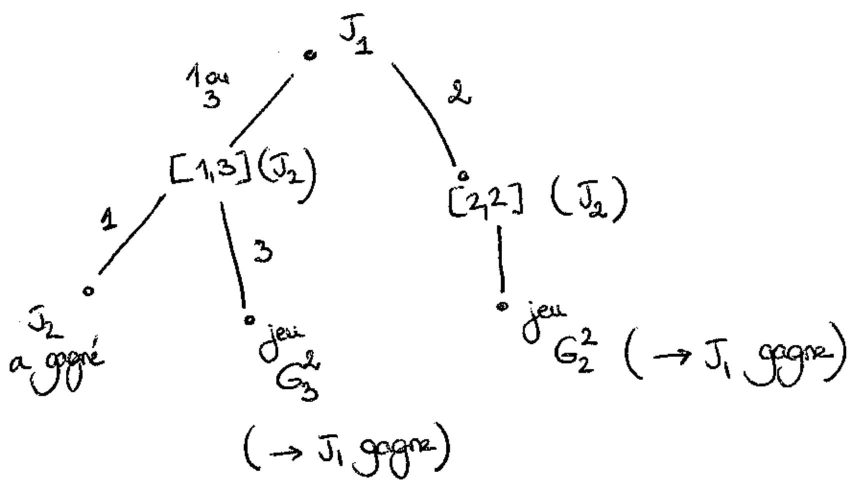
G_2^1 :



G_3^1 :



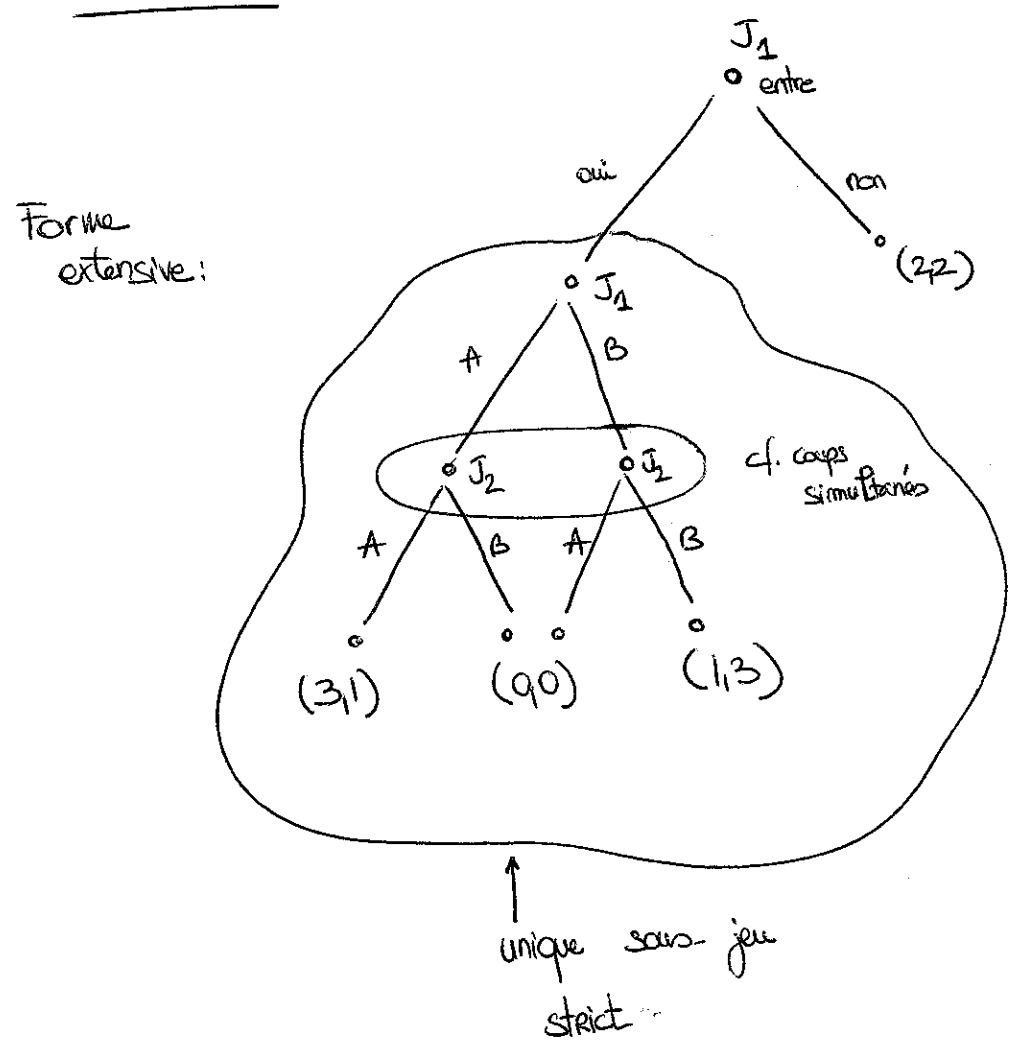
G_4^1 :



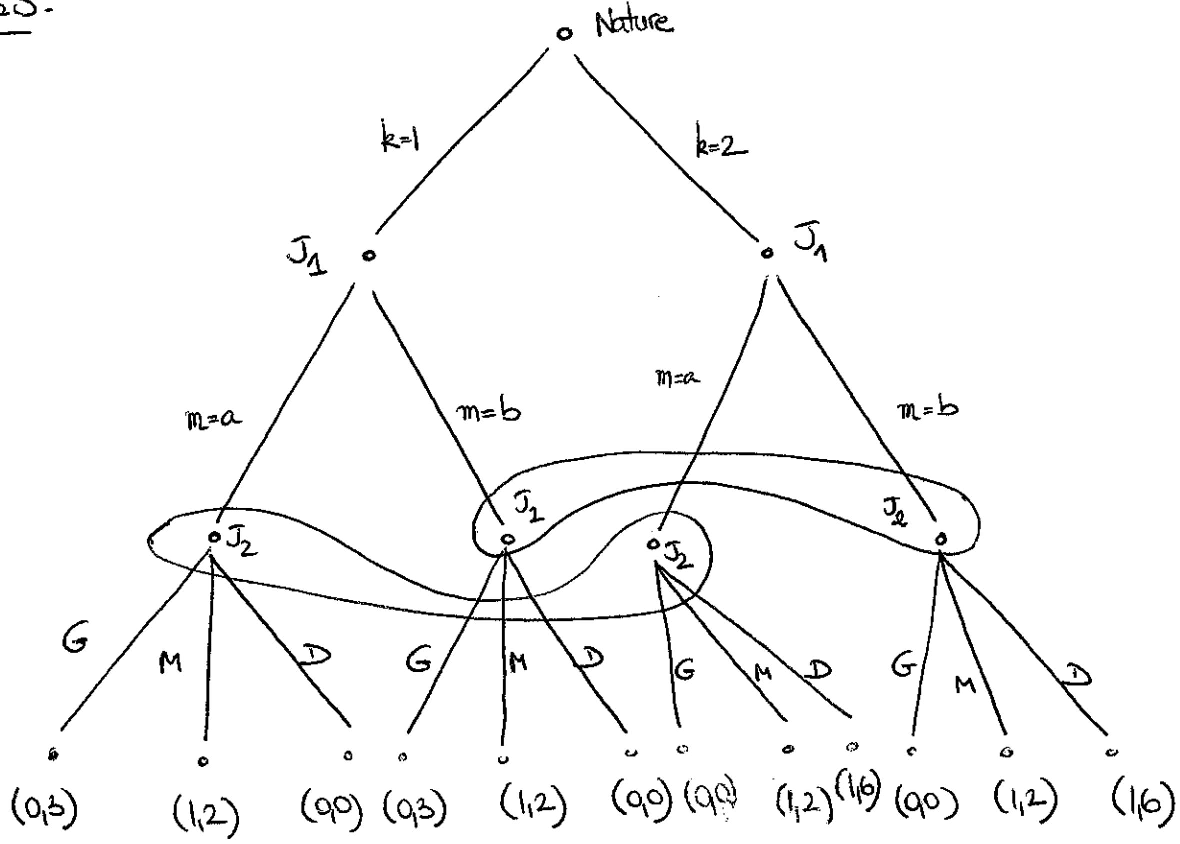
J_1 joue 2 au 1er coup et l'emportera

Exercice 4.

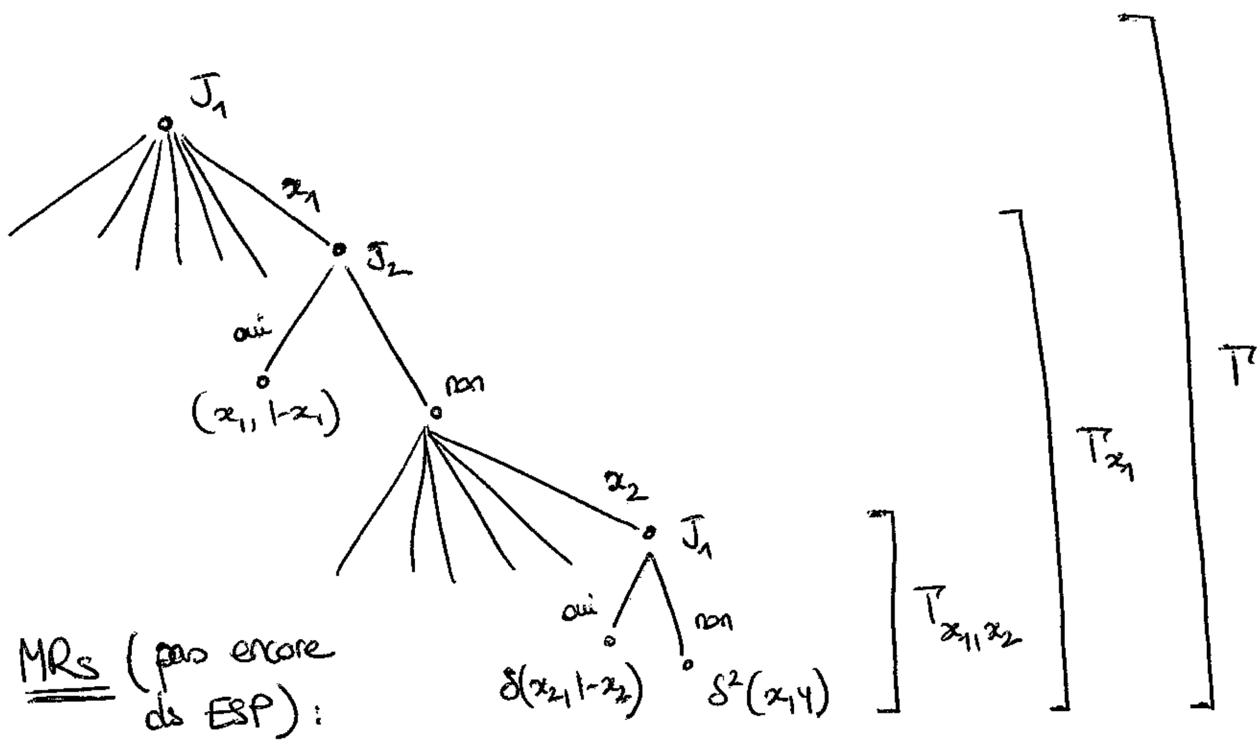
Forme extensive :



Exercice 5.



Exercice 3 : Calcul ESP par induction à rebours.



Calcul des MRs (pas encore des ESP) :

Dans Γ_{x_1,x_2} : J_1 accepte ssi $x_2 \geqslant \delta x$

paiements $v(\Gamma_{x_1,x_2}) = (v^1(\Gamma_{x_1,x_2}), v^2(\Gamma_{x_1,x_2}))$

$$= \begin{cases} \delta^2(x, y) & \text{si } x_2 \leq \delta x \\ \delta(x_2, 1-x_2) & \text{si } x_2 \geqslant \delta x \end{cases} \quad (**)$$

Etape suivante : Γ_{x_1}

Le paiement maximal de J_2 est

$$v^2(\Gamma_{x_1}) = \max \{\delta(1-x_2) : x_2 \geqslant \delta x\} \cup \{\delta^2 y\} \cup \{1-x_1\}$$

$$= \max \{\delta(1-\delta x), \delta^2 y, 1-x_1\}$$

$$= \max \{\delta(1-\delta x), 1-x_1\}$$

(car $\delta^2 y < \delta(1-\delta x)$ vu $\delta^2 y + \delta^2 x \leqslant \delta^2 < \delta$)

et sa stratégie optimale est :

- refuser et jouer $x_2 = \delta x$ si $\delta(1-\delta x) \geqslant 1-x_1$
- (*) accepter si $\delta(1-\delta x) \leq 1-x_1$

On en déduit $v^1(T_{x_1})$:

$$v^1(T_{x_1}) = \begin{cases} x_1 & \text{si } 1-x_1 \geq \delta(1-\delta x) \\ v^1(T_{x_1}, \delta x) & \text{sinon} \\ (= \delta^2 x) & \end{cases}$$

Pour le jeu entier :

$$v^1(T) = \max_{x_1} v^1(T_{x_1})$$

$$= \max \{x_1 : x_1 \leq 1 - \delta(1-\delta x)\} \cup \{\delta^2 x\}$$

$$= \max \{1 - \delta + \delta^2 x, \quad \delta^2 x\}$$

$$= 1 - \delta + \delta^2 x$$

obtenu pour $x_1 = 1 - \delta(1-\delta x)$.

Pour cette valeur J_2 accepte au 1er tour et obtient le paiement $\delta - \delta^2 x$.
(s'il refuse, les paiements sont $(\delta^2 x, \delta(1-\delta x))$
et J_1 aurait intérêt à dévier, en jouant juste un peu moins .... donc ce ne serait pas un EN, ni a fortiori un ESP !)

[Calcul MRs $\longrightarrow$ ESP :

Rq: on a un unique paiement d'ESP,
mais plusieurs ESP ? cf. les cas d'indifférence (*) et (**).

Non, en (*) pour avoir un EN dans le sous-jeu, il faut accepter, sinon il y a déviation profitable pour J_1 (cf. ci-dessus)

En (**), si $x_2 = \delta x$, J_1 doit accepter sinon déviation profitable pour J_2
(tjs $\delta^2 y < \delta(1-\delta x)$ ...)

Exercice 7.

Forme extensive :