

**Cinquième séance :** Les exercices 1, 3 et 4 étaient au programme.

**Sixième séance :** Les exercices 5, 6, 7, 9 étaient au programme.

**Exercice 1 (Le jeu de Gale).**

**1.** Une stratégie pour le joueur  $A$  est une application qui à tout nœud de décision du joueur  $A$  associe une décision parmi les choix possibles (i.e., les cases restantes) au nœud considéré. Remarque: le fait d'associer à chaque nœud (et pas juste à chaque configuration) une action permet de tenir compte du passé, du temps, de la manière dont joue l'adversaire. Même si, bien sûr, une stratégie optimale ne tient compte que de la configuration...

Une stratégie gagnante pour le joueur  $A$  est une stratégie telle que le joueur  $A$  gagne la partie contre toute stratégie du joueur adverse  $-A$ .

**2.** Le jeu compte deux joueurs qui jouent séquentiellement, il est à longueur maximale finie et à information parfaite. Le théorème de Zermelo assure donc qu'il existe un couple de stratégies pures pour chacun des joueurs formant un équilibre de Nash. Or quelles sont les résultats possibles? Ici, on peut soit gagner, soit perdre. Ainsi, à l'équilibre de Nash, un joueur gagne, et l'autre perd; et le joueur qui perd, perd encore quelle que soit la déviation (une stratégie alternative) qu'il joue, par définition des déviations non profitables. C'est qu'un des deux joueurs a une stratégie gagnante.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il s'agisse du joueur II. Si alors le joueur I joue  $(n,m)$ , il existe par hypothèse une façon de jouer pour le joueur II qui lui assure la victoire. On note  $(i,j) \neq (n,m)$  le premier coup du joueur II dans cette situation. Mais alors, en jouant  $(i,j)$  dès le premier coup (cela neutralise en particulier  $(n,m)$ ) et en suivant la stratégie ci-dessus du joueur II à partir du nœud  $(i,j)$ , le joueur I est assuré de gagner. Le joueur I posséderait donc également une stratégie gagnante, ce qui est absurde. On conclut que le joueur qui a une stratégie gagnante est le joueur I.

**3.** On étudie tout d'abord la situation fondamentale de taille  $n$  (voir figure à la fin du corrigé), l'échiquier  $2 \times n$  où la case  $(2,n)$  a déjà été ôtée. Dans ce cas, le joueur  $A$  qui a la main est perdant. En effet, si  $A$  joue  $(1,j)$  (où  $j \geq 2$ ), alors  $-A$  joue  $(2,j-1)$ ; et si  $A$  joue  $(2,j)$  ( $j \geq 1$ ), alors  $-A$  joue  $(1,j+1)$ . On retombe alors sur la situation fondamentale aux rangs  $j-1 < n$  et  $j < n$ , respectivement, et on conclut par un nombre fini d'itérations. (Clairement, un raisonnement propre se ferait par récurrence.)

Ceci étant, dans l'échiquier de taille  $2 \times m$ , le joueur I se ramène à la situation fondamentale de taille  $m$  en n'ayant pas la main, et ce, en jouant  $(2,m)$ .

Dans l'échiquier de taille  $n \times n$ , le joueur I joue  $(2,2)$ , puis à chaque coup  $(i,j)$  du joueur II, il répond par l'action symétrique  $(j,i)$ . Ainsi, on est sûr que c'est II qui devra jouer  $(1,1)$ .

**4.** Dans les cas infinis, le théorème de Zermelo ne s'applique pas (ni le raisonnement par l'absurde de la question 2), parce que la longueur des parties n'est pas uniformément bornée. (D'ailleurs, toutes les parties finissent-elles? On peut prouver que oui, ... on devrait prouver

que oui, sous peine de devoir introduire un troisième résultat, de type “partie nulle”.) En revanche, il est aisé d’exhiber des stratégies gagnantes. (Le cas difficile, c’est le cas général de  $n \times m$ .)

Le cas  $\infty \times \infty$  est traité comme le cas  $n \times n$ ; le joueur I y possède une stratégie gagnante (jouer (2,2), puis jouer symétriquement au joueur II).

On traite le cas  $n \times \infty$  en distinguant selon la valeur de  $n$ .

Si  $n = 1$ , le joueur I gagne en jouant (1,2).

Si  $n = 2$ , c’est le joueur II qui gagne. En effet, si I joue (2, $j$ ) ( $j \geq 1$ ), alors II joue (1, $j + 1$ ), et on est ramené à la situation fondamentale de taille  $j$ , où c’est I qui a la main, et perd par conséquent. Si au premier coup I joue en revanche (1, $j$ ) ( $j \geq 2$ ), alors II joue (2, $j - 1$ ), et ici encore, I se retrouve dans une situation fondamentale, de taille  $j - 1$ , en ayant la main.

Enfin, lorsque  $n \geq 3$ , en jouant (3,1), le joueur I se ramène à la situation précédent  $2 \times \infty$ , en n’ayant pas la main; il a alors une stratégie gagnante.

Le cas  $\infty \times n$  se déduit du cas  $n \times \infty$ , en notant que les situations ne diffèrent que d’une symétrie selon la diagonale.

### Exercice 2 (Le jeu de Nim).

Pour l’explicitation des premiers jeux, voir les figures à la fin du corrigé. Par définition du jeu,  $1 \in N^\alpha$ .

Ici, le théorème de Zermelo s’applique et montre, comme précédemment, que dans  $G_n^j$ , un des deux joueurs a une stratégie gagnante. On en déduit que  $N^\alpha$  et  $N^\beta$  forment une partitions des entiers,  $N^\alpha = \mathbb{N}^* \setminus N^\beta$ . Les deux assertions sont ainsi une seule et même assertion, elles sont chacune la simple réécriture de l’autre utilisant le partitionnement.

Il suffit donc de prouver les deux implications réciproques. La première: dans  $G_n^i$ ,  $i$  joue ce  $n_1$  tel que  $n_1 \in N^\beta$  et  $n - n_1 \in N^\beta$ ; le joueur  $j$  a le choix entre jouer  $G_{n_1}^j$  ou  $G_{n-n_1}^j$ , mais par définition de  $N^\beta$ , ces deux jeux sont gagnants pour  $i$  – soit au final,  $n \in N^\alpha$ . La deuxième se prouve de la même manière, en notant que quel que soit le choix  $n_1$  du joueur  $i$ , le joueur  $j$  aura le choix entre les deux jeux  $G_{n_1}^j$  et  $G_{n-n_1}^j$ , dont l’un au moins est gagnant pour lui – soit au final,  $n \in N^\beta$ .

On établit maintenant par récurrence qui sont  $N^\alpha$  et  $N^\beta$ . La propriété  $\mathcal{P}(p)$  (pour  $p \in \mathbb{N}$ ) est que les entiers naturels positifs  $5p - 1, 5p, 5p + 1 \in N^\alpha$  et  $5p + 2, 5p + 3 \in N^\beta$ .

Pour  $p = 0$ : on a déjà vu plus haut que  $1 \in N^\alpha$  et  $2, 3 \in N^\beta$  (et  $4 \in N^\alpha$ ).

Supposons la propriété vraie jusqu’au rang  $p \geq 0$ .

Soit une décomposition de  $5(p + 1) + 2$  ou  $5(p + 1) + 3$  en  $x + y$ , avec  $x, y \geq 1$ . Alors, vu  $x + y \equiv 2$  ou  $3 [5]$ , on ne peut avoir à la fois  $x \equiv 2$  ou  $3 [5]$  et  $y \equiv 2$  ou  $3 [5]$ . Ainsi,  $x$  ou  $y \equiv 0, 1$  ou  $4 [5]$ , et l’hypothèse de récurrence conclut que  $x$  ou  $y$  est dans  $N^\alpha$ . Au final,  $5(p + 1) + 2, 5(p + 1) + 3 \in N^\beta$ .

On écrit également que  $5(p + 1) = (5p + 2) + 3$ ,  $5(p + 1) - 1 = (5p + 2) + 2$  et  $5(p + 1) + 1 = (5p + 3) + 3$ , qui sont trois sommes de deux nombres de  $N^\beta$ . Cela prouve que  $5(p + 1) - 1, 5(p + 1), 5(p + 1) + 1$  sont tous trois dans  $N^\alpha$ .

### Exercice 3 (Marchandage de Rubinstein).

**Jeu statique.** Une stratégie pour le joueur 1 est  $x \in [0,1]$ ; une stratégie pour le joueur 2 est une fonction  $f : [0,1] \rightarrow \{0,1\}$ , modélisée par l'indicatrice  $\mathbb{I}_A$  d'une partie  $A$  de  $[0,1]$ .

Pour tout  $x$ , il existe un équilibre de Nash dans lequel le joueur 1 propose  $x$  et le joueur 2 accepte : cet équilibre est  $(x, S(x))$ , où la stratégie du joueur 1 est indexée par  $x$  et correspond à l'offre initiale  $(x, 1-x)$ , et où la stratégie  $S(x)$  du joueur 2 est, par exemple, d'accepter les partages  $(y, 1-y)$  lui donnant au moins  $1-x$  (i.e., tels que  $y \leq x$ ) :  $S(x) = \mathbb{I}_{A_x}$ , avec  $A_x = [1-x, 1]$ . En effet, le joueur 2, qui accepte ici le partage, ne va pas le refuser pour gagner 0, et le joueur 1 ne va pas diminuer sa partie  $x$  et gagner moins, ni l'augmenter (car alors le joueur 2 refuse).

En réalité, tout  $A_x$  contenant  $1-x$  et inclus dans  $[1-x, 1]$ , par exemple  $A_x = \{1-x\}$ , convient.

Cette question montre que la notion d'équilibre de Nash n'est pas suffisante ici pour résoudre, et même pour simplifier, le jeu ; tous les paiements sont paiements d'équilibre de Nash !

Faisons une récursion à rebours (ici, on n'a pas de théorème général assurant l'existence d'un équilibre parfait en sous-jeu, du moins, celui du cours ne s'applique pas, il mettrait en jeu des ensembles d'action finis ; mais la récursion à rebours va se conclure, car dans tout sous-jeu, le supremum des paiements possibles est atteint).

Contre l'offre  $(x, 1-x)$  du joueur 1, avec  $x \neq 1$ , le meilleur choix du joueur 2 est d'accepter, refuser entraînerait un paiement nul.

Un équilibre parfait en sous-jeu induit donc une acceptation, i.e., il est de la forme  $(x, A)$ , avec  $]0,1[ \subset A$ . Il suffit, pour finir de définir  $A$ , de préciser ce qui se passe lorsque  $x = 1$ . Cela ne peut se faire en étudiant le sous-jeu indexé par  $x = 1$ , le joueur 2 y étant indifférent entre accepter et refuser le partage. En revanche, on utilise le fait que  $(x, A)$  doit être un équilibre de Nash du jeu tout entier. Au passage, on aura aussi la valeur de  $x$  à l'équilibre.

Aucun  $(x, A)$  ne peut être équilibre avec  $x < 1$  (le joueur 1 aurait intérêt à proposer  $(1+x)/2$ ).  $(1, ]0,1[)$  n'est pas équilibre non plus, le joueur 1 ayant intérêt à proposer tout  $x < 1$ , par exemple  $x = 1/2$ . Seul reste  $(1, [0,1])$ , qui est bien équilibre de Nash du jeu.

En conclusion,  $(1, [0,1])$  est l'unique équilibre parfait en sous-jeu ; son paiement est  $(1,0)$ .

Philosophie : l'induction à rebours permet de sélectionner parmi les équilibres de Nash ceux qui induisent des équilibres de Nash dans tous les sous-jeux. Ainsi, on écarte les équilibres de Nash qui reposent sur des menaces non crédibles, c'est-à-dire des menaces qui ne sont pas mises à exécution par un joueur rationnel du fait de la séquentialité du jeu – ce dont on ne tient pas compte dans la formulation du jeu sous forme normale, qui permet de déterminer tous les équilibres de Nash, parfaits ou non. Ici, la menace de la part du joueur 2 de refuser un partage qui ne lui attribue pas assez est suffisante pour que tout partage soit un équilibre de Nash. En revanche, le seul partage qui découle d'un équilibre parfait est le partage où le joueur 1 s'attribue tout le surplus, et ce parce que la menace du joueur n'est pas crédible et n'est pas mise à exécution (à cause du cas d'indifférence  $x = 1$ ). Avec les notations qui suivent, on retient donc que le paiement d'ESP pour  $T = 1$  donne  $U_1 = (1,0)$ .

### Jeu dynamique.

**1.** On procède à rebours, et calcule au passage les paiements d'ESP. Voir résolution graphique dans les figures à la fin du corrigé (méthode conseillée et vue en TD) ou le raisonnement un peu lâche (mais bien plus concis) qui suit.

A la deuxième offre, le joueur 2 ne propose que des partages  $(x_2, 1 - x_2)$  lui assurant un paiement  $\delta(1 - x_2)$  au moins égal à celui du refus,  $\delta^2 y$ ; et le joueur 1 accepte tout tel partage lui assurant un paiement  $\delta x_2$  au moins égal à  $\delta^2 x$ . Ainsi, le joueur 2 propose le plus petit  $x_2 \leq 1 - \delta y$  tel que  $x_2 \geq \delta x$ ; ces deux contraintes sont compatibles, car  $x + y \leq 1$ , et résultent en le choix  $x_2 = \delta x$ , avec paiements  $(\delta^2 x, \delta(1 - \delta x))$ .

Au premier tour, le joueur 1 ne propose que des partages  $(x_1, 1 - x_1)$  lui donnant au moins le paiement garanti  $\delta^2 x$  au tour suivant, et le joueur 2 accepte tout partage lui procurant au moins  $\delta(1 - \delta x)$ . On modélise ceci par les contraintes (compatibles) respectives  $x_1 \geq \delta^2 x$  et  $1 - x_1 \geq \delta(1 - \delta x)$ , où l'on précise que le joueur 1 cherche à prendre  $x_1$  maximal; ce qui résulte en le choix  $x_1 = 1 - \delta + \delta^2 x$ , et les paiements  $(1 - \delta + \delta^2 x, \delta - \delta^2 x)$ , indépendants de  $y$ . L'ESP est unique.

Note: les paiements se somment à 1, il y a accord au premier tour. Les contours et les proportions de cet accord sont fonctions du point de menace et des taux d'escompte, mais il est entériné immédiatement.

**2.** Pour  $T \geq 3$ , en cas de deux refus successifs, on est ramené au même jeu, mais en ayant perdu deux périodes. Si l'on connaît le partage d'équilibre  $U_{T-2}$  pour le jeu de longueur  $T - 2$ , celui-ci est le point de menace  $(x, y)$  que nous devons considérer dans le jeu auxiliaire  $\Gamma_2(x, y)$ , afin que ce dernier soit équivalent au jeu originel en  $T$  coups. On en déduit que  $U_T = (u_T, 1 - u_T)$  (i.e., accord au premier tour), où

$$u_T = 1 - \delta + \delta^2 u_{T-2} .$$

La suite  $(u_t)$  satisfaisant cette condition de récurrence, il suffit, pour la calculer entièrement, de connaître les deux premiers termes; ils sont  $u_1 = 1$  (cf. jeu statique) et  $u_2 = 1 - \delta$  (cf. jeu dynamique  $\Gamma_2(0, 0)$ ).

Déterminons sa limite.  $(u_{2t})$  et  $(u_{2t+1})$  sont toutes deux des suites arithmético-géométriques, avec un facteur multiplicatif  $\delta^2 < 1$ . Elles convergent donc toutes deux, vers le point fixe  $x^*$  de la fonction  $f : x \mapsto 1 - \delta + \delta^2 x$ ,  $x^* = (1 - \delta)/(1 - \delta^2) = 1/(1 + \delta)$ . En fait, vu les variations de  $x \mapsto f(x) - x$ , vu les positions de  $u_1$  et  $u_2$  par rapport à  $x^*$ , on peut même préciser que  $(u_{2t})$  et  $(u_{2t+1})$  sont adjacentes, la première étant croissante, la seconde étant décroissante, de limite commune  $x^*$ .

#### Exercice 4 (Bataille des sexes avec option d'entrée).

**1.** Il est clair que  $(A, A)$  et  $(B, B)$  forment les équilibres de Nash purs. Leurs paiements respectifs sont  $(3, 1)$  et  $(1, 3)$ .

On détermine les équilibres mixtes par exemple par indifférence, en remarquant premièrement qu'il n'existe pas d'équilibre semi-mixte (avec le raisonnement habituel: dans chaque ligne et chaque colonne, il y a une unique meilleure réponse, si donc un joueur joue en pures, l'autre également); que par conséquent tout équilibre autre qu'en couple de stratégies pures est complètement mixte, de la forme  $(x, y)$  où  $x, y > 0$ . Les deux équations d'indifférence que l'on obtient alors ( $x$  est tel que le joueur-colonne est indifférent, soit  $x = 3(1 - x)$ ,  $y$  est tel que le joueur-ligne est indifférent, soit  $3y = 1 - y$ ) prouvent l'existence d'un unique équilibre mixte,  $(x, y) = (3/4, 1/4)$ . Son paiement est  $(3/4, 3/4)$ .

**3.** Les stratégies (équivalentes, dans le jeu sous forme normale réduite) du joueur-ligne sont "non", "oui puis A", "oui puis B" (grâce à la représentation sous forme extensive, voir figure

à la fin du corrigé, qui fait jouer le joueur-ligne deux fois de suite). Les stratégies du joueur-colonne sont  $A$  et  $B$  (mais il se peut qu'il n'ait pas à jouer). On obtient la forme normale suivante :

	$A$	$B$
non	$(2, 2)$	$(2, 2)$
oui puis $A$	$(3, 1)$	$(0, 0)$
oui puis $B$	$(0, 0)$	$(1, 3)$

4. La stratégie  $B$  du joueur-ligne est strictement dominée, elle n'intervient pas dans les équilibres de Nash. On est ainsi ramené au jeu  $2 \times 2$

	$A$ ( $y$ )	$B$ ( $1 - y$ )
non ( $p$ )	$(2, 2)$	$(2, 2)$
oui puis $A$ ( $1 - p$ )	$(3, 1)$	$(0, 0)$

que l'on étudie comme d'habitude. Le plus simple est de procéder par intersection des meilleures réponses. Le paiement du joueur-ligne est  $(2 - 3y)p + \square$ , tandis que celui du joueur-colonne est  $(1 - p)y + \square$ , de sorte que les correspondances de meilleure réponse sont données par

$$p^*(y) \in \begin{cases} \{1\} & \text{si } y < 2/3, \\ [0, 1] & \text{si } y = 2/3, \\ \{0\} & \text{si } y > 2/3; \end{cases}$$

et

$$y^*(p) \in \begin{cases} \{1\} & \text{si } p < 1, \\ [0, 1] & \text{si } p = 1. \end{cases}$$

L'intersection donne les équilibres  $(0, 1)$ , i.e., (oui puis  $A$ ,  $A$ ), et ceux de la forme  $(1, y)$  avec  $y \leq 2/3$ , i.e., (non,  $y$ ) avec  $y \leq 2/3$ .

5. Les équilibres parfaits en sous-jeu définissent un équilibre de Nash dans tout sous-jeu : ici, le seul sous-jeu strict est la bataille des sexes originelle considérée à la question 1. En comparant les équilibres des questions 1. et 4., et en notant que la stratégie "non" est équivalente à toute stratégie "non puis  $A$  avec probabilité  $x$ ,  $B$  avec probabilité  $1 - x$ ", on a trois équilibres parfaits en sous-jeu : (oui puis  $A$ ,  $A$ ), (non, 0) et (non,  $1/4$ ). Les choix  $y = 0$  et  $y = 1/4$  sont des menaces crédibles du joueur-colonne, qui rendent préférable au joueur-ligne le refus de jouer.

6. Si on élimine les stratégies faiblement dominées, on élimine d'abord la ligne "oui puis  $B$ ", puis la colonne  $B$ , puis la ligne "non". Le seul couple d'actions qui subsiste est l'ESP (oui puis  $A$ ,  $A$ ).

Cet équilibre est soutenu par le principe de *forward induction* : si le joueur-ligne décide de participer à la bataille des sexes, le joueur-colonne doit penser que le joueur-ligne a renoncé à un paiement de 2, que c'est donc qu'il attend plus, et qu'il va jouer  $A$ .

Ainsi, lorsque l'on entre dans la bataille des sexes, on n'est pas face à une bataille des sexes classique : en prenant part, le joueur-ligne signale à l'autre joueur son action.

**Exercice 5 (Transmission d'information).**

**1.** Les stratégies des joueurs dépendent de l'information portée à leur connaissance. Ainsi, le joueur 1 a quatre stratégies, données par les fonctions  $m : k \in \{1, 2\} \mapsto m(k) \in \{a, b\}$ . On les note sous la forme  $m(1) m(2)$ , soit  $aa, ab, ba, bb$ .

Le joueur 2 a neuf stratégies, données par les fonctions  $s : m \in \{a, b\} \mapsto s(m) \in \{G, M, D\}$ . On les note sous la forme  $s(a) s(b)$ , soit  $GG, GM, GD, MG, \dots, DD$ .

Le jeu n'admet pas de sous-jeu strict : quelque soit le nœud interne considéré, il faut prendre ses fils et tous les nœuds liés à lui ou à ses fils par des ensembles d'information, jusqu'à parvenir à un ancêtre commun à tout ce petit monde – et on se retrouve avec l'arbre tout entier.

**2.** Le jeu se réécrit sous forme normale, avec les paiements (espérés) en stratégies pures suivants :

	<i>GG</i>	<i>GM</i>	<i>GD</i>	<i>MG</i>	<i>MM</i>	<i>MD</i>	<i>DG</i>	<i>DM</i>	<i>DD</i>
<i>aa</i>	0, 3/2	0, 3/2	0, 3/2	1, 2	1, 2	1, 2	1/2, 3	1/2, 3	1/2, 3
<i>ab</i>	0, 3/2	1/2, 5/2	1/2, 9/2	1/2, 1	1, 2	1, 4	0, 0	1/2, 1	1/2, 3
<i>ba</i>	0, 3/2	1/2, 1	0, 0	1/2, 5/2	1, 2	1/2, 1	1/2, 9/2	1, 4	1/2, 3
<i>bb</i>	0, 3/2	1, 2	1/2, 3	0, 3/2	1, 2	1/2, 3	0, 3/2	1, 2	1/2, 3

Après élimination des stratégies *GG, GM, MG, MM*, toutes strictement dominées par *DD*, il reste

	<i>GD</i>	<i>MD</i>	<i>DG</i>	<i>DM</i>	<i>DD</i>
<i>aa</i>	0, 3/2	<u>1</u> , 2	1/2, <u>3</u>	1/2, <u>3</u>	1/2, <u>3</u>
<i>ab</i>	1/2, 9/2	<u>1</u> , 4	0, 0	1/2, 1	1/2, <u>3</u>
<i>ba</i>	0, 0	1/2, 1	1/2, 9/2	<u>1</u> , 4	1/2, 3
<i>bb</i>	1/2, <u>3</u>	1/2, <u>3</u>	0, 3/2	<u>1</u> , 2	1/2, <u>3</u>

où l'on a souligné dans chaque colonne et chaque ligne l'argument maximum. Les couples de paiements tous deux soulignés sont les équilibres de Nash en stratégies pures, il y en a six :  $(ab, GD)$ ,  $(bb, GD)$ ,  $(aa, DG)$ ,  $(ba, DG)$ ,  $(aa, DD)$ ,  $(bb, DD)$ . Tous apportent un paiement de 1/2 au joueur 1, qui est indifférent entre eux. En revanche, les deux qui correspondent à une différenciation des messages selon  $k$  (à une révélation de  $k$  en quelque sorte) apportent un paiement de 9/2 au joueur 2, alors que les quatre qui correspondent à une réponse unique du joueur 1 (qui ne révèle ainsi aucune information) face à  $k$  ne lui rapportent que 3.

**3.** On se demande donc si  $(1/2(aa + ab), MD)$  est un équilibre. Or, le tableau des paiements est obtenu en moyennant les lignes *aa* et *ab*, et il indique clairement que le couple mixte considéré est un équilibre, de paiements  $(1, 3)$  :

	<i>GD</i>	<i>MD</i>	<i>DG</i>	<i>DM</i>	<i>DD</i>
$1/2(aa + ab)$	1/4, <b>3</b>	<b>1</b> , <b>3</b>	1/4, <b>3/2</b>	1/2, <b>2</b>	1/2, <b>3</b>
<i>aa</i>	0, 3/2	<b>1</b> , 2	1/2, 3	1/2, 3	1/2, 3
<i>ab</i>	1/2, 9/2	<b>1</b> , 4	0, 0	1/2, 1	1/2, 3
<i>ba</i>	0, 0	<b>1/2</b> , 1	1/2, 9/2	1, 4	1/2, 3
<i>bb</i>	1/2, 3	<b>1/2</b> , 3	0, 3/2	1, 2	1/2, 3

(ici, on a indiqué en gras les déviations à vérifier).

Le paiement  $(1, 3)$  est meilleur pour le joueur 1 que ce qu'il pouvait obtenir avec aucun équilibre de Nash pur ; c'est même le meilleur paiement qu'il puisse obtenir dans ce jeu (en

équilibre ou non). L'équilibre correspondant à (1, 3) agit par révélation partielle de l'information dont dispose le joueur 1 (ni révélation totale  $ab$  ou  $ba$ , ni absence de révélation  $aa$  ou  $bb$ ).

**Exercice 6 (Enchères au premier ou au deuxième prix).**

1. Une stratégie pour un joueur est une fonction  $b : [0,1] \rightarrow [0,1]$ , qui associe à un type  $\theta \in [0,1]$  l'offre  $b(\theta)$  correspondante. Le paiement d'un joueur est  $\theta - b(\theta)$  s'il remporte l'enchère sans égalité, 0 s'il ne remporte pas l'enchère (et presque sûrement, le cas d'égalité n'arrive pas).

Faisons comme si l'énoncé ne nous suggérait pas d'équilibre et essayons de le trouver par analyse (puis on vérifiera par synthèse que le  $n$ -tuple trouvé convient).

**Analyse :** Vu la symétrie du problème, on cherche un équilibre de Nash symétrique,  $(b, b, \dots, b)$ . (Voir l'exercice 11 du TD2 pour des conditions générales d'existence d'équilibres symétriques.) Il suffit de déterminer une bonne fonction  $b$ , qu'on prend (tant qu'à faire, c'est l'analyse!) dérivable et strictement croissante (donc inversible).

On définit  $b$  point par point : il suffit de trouver la meilleure réponse pour un type  $\theta$  donné fixé, face à des types i.i.d. uniformes pour des adversaires utilisant également  $b$ . *Id est*, on fixe un joueur  $i$ , on fixe son type  $\theta_i$ , et on travaille conditionnellement à  $\theta_i$  (mais on intègre par rapport aux  $\theta_j, j \neq i$ ). La fonction de paiement  $x \mapsto V_i(x)$  de  $i$ , qui associe à l'offre  $x$  l'espérance conditionnelle sachant  $\theta_i$  de son paiement, vaut

$$\begin{aligned} V_i(x) &= \mathbb{P} \left[ \max_{j \neq i} b(\theta_j) < x \right] (\theta_i - x) \\ &= \mathbb{P} \left[ \max_{j \neq i} \theta_j < b^{-1}(x) \right] (\theta_i - x) \\ &= (b^{-1}(x))^{n-1} (\theta_i - x) ; \end{aligned}$$

et il suffit d'imposer que  $b(\theta_i)$  est un argument maximum de cette fonction  $V_i$ . En particulier,  $V_i'(b(\theta_i)) = 0$ . On obtient ainsi une équation différentielle sur  $b$ , qui nous permet de trouver  $b$ . On n'omettra pas de vérifier dans un second temps que  $b(\theta_i)$ , a priori simple extremum local de  $V_i$ , est bien maximum global.

Détermination de  $b$  (pour  $n \geq 2$ ):

$$\begin{aligned} V_i'(x) &= (n-1)(b^{-1})'(x) (b^{-1}(x))^{n-2} (\theta_i - x) - (b^{-1}(x))^{n-1} \\ &= (b^{-1}(x))^{n-2} \left( \frac{(n-1)(\theta_i - x)}{b'(b^{-1}(x))} - b^{-1}(x) \right) \end{aligned}$$

et  $V_i'(b(\theta_i)) = 0$ , soit l'équation différentielle (notant  $\theta = \theta_i$  pour simplifier, et excluant le cas  $b^{-1}(b(\theta_i)) = \theta_i = 0$ )

$$(n-1)(\theta - b(\theta)) - \theta b'(\theta) = 0, \quad b'(\theta)\theta + (n-1)b(\theta) = (n-1)\theta$$

de solution homogène les  $\square \theta^{1-n}$  (mais seule la solution homogène nulle convient, puisque  $b$  est bornée), et de solution particulière cherchée sous la forme  $a\theta + b$ : on obtient  $b = 0$  et  $a = (n-1)/n$ . Au final, on propose, comme l'énoncé,  $b(\theta_i) = ((n-1)/n)\theta_i$ .

**Synthèse :** Jusqu'à présent, on pouvait raisonner comme au brouillon. Plus maintenant : il faut un raisonnement très propre. On rappelle que le problème consiste à voir que, notant  $\pi_i$

le paiement du joueur  $i$ , on a, pour toute fonction  $f$ ,

$$\mathbb{E} [\pi_i(b, \dots, b, f, b \dots, b)] \leq \mathbb{E} [\pi_i(b, \dots, b, b, b \dots, b)]$$

et que pour ce faire, il suffit que pour tout  $f$ ,

$$V_i(f(\theta_i)) = \mathbb{E} [\pi_i(b, \dots, b, f, b \dots, b) | \theta_i] \leq \mathbb{E} [\pi_i(b, \dots, b, b, b \dots, b) | \theta_i] = V_i(b(\theta_i)) .$$

Il reste donc à voir que  $b(\theta_i)$ , extremum local de  $V_i$  (cf. analyse), est bien maximum global (ce sera la synthèse). C'est évident pour  $\theta_i = 0$ . Pour  $\theta_i > 0$ , on note, vu la forme postulée pour  $b$  et les calculs ci-dessus, que

$$V_i(x) = \left( \frac{nx}{n-1} \right)^{n-1} (\theta_i - x) .$$

Pour  $n = 2$ ,  $x = \theta_i/2$  est maximum global. Pour  $n \geq 3$ , la dérivée

$$V_i' : x \mapsto (n/(n-1))^{n-1} x^{n-2} ((n-1)\theta_i - nx)$$

s'annule en  $x = 0$  et  $x = b(\theta_i)$ , mais il faut étudier le signe de la dérivée seconde :

$$V_i'' : x \mapsto (n/(n-1))^{n-1} x^{n-3} ((n-1)(n-2)\theta_i - n(n-1)x) ;$$

$V_i'' > 0$  au voisinage de 0, et  $V_i''(b(\theta_i)) = -\square\theta_i < 0$ , de sorte que  $b(\theta_i)$  est bien (l'unique) argument maximum de  $V_i$  pour  $\theta_i > 0$ .

Et au final, on a prouvé que le  $n$ -uplet  $(b, \dots, b)$  proposé était bien un équilibre de Nash.

Le prix que retire le vendeur est  $\max\{b(\theta_1), \dots, b(\theta_n)\}$ . L'espérance de ce prix vaut (par théorème de Fubini)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \max_{i=1, \dots, n} b(\theta_i) \right] &= \int_{[0,1]} \mathbb{P} \left\{ \max_{i=1, \dots, n} b(\theta_i) \geq t \right\} dt = 1 - \int_{[0,1]} \mathbb{P} \left\{ \max_{i=1, \dots, n} b(\theta_i) < t \right\} dt \\ &= 1 - \int_{[0,1]} (\mathbb{P} \{b(\theta_1) < t\})^n dt = 1 - \int_{[0,1]} (\mathbb{P} \{\theta_1 < nt/(n-1)\})^n dt \\ &= 1 - \int_{[0, (n-1)/n]} (nt/(n-1))^n dt - \int_{[(n-1)/n, 1]} 1 dt \\ &= \frac{n-1}{n} - \frac{n^n}{(n-1)^n} \frac{1}{n+1} [t^{n+1}]_0^{(n-1)/n} = \frac{n-1}{n+1} \end{aligned}$$

**2.** On a vu au TD1 qu'annoncer sa valuation était une stratégie faiblement dominante. Le fait pour tous les joueurs d'annoncer leur valuation constitue donc un équilibre de Nash. Le prix espéré  $\mathbb{E}[P]$  pour le vendeur est, vu la symétrie du problème, et vu que p.s., les cas d'égalité

ne se produisent pas,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[P] &= \int_{[0,1]} \mathbb{P}\{P \geq t\} dt = 1 - \int_{[0,1]} \mathbb{P}\{P < t\} dt \\
 &= 1 - \int_{[0,1]} \left( \mathbb{P}\left\{ \max_{i=1,\dots,n} \theta_i < t \right\} + n \mathbb{P}\left\{ \theta_1 \geq t \text{ et } \max_{i=2,\dots,n} \theta_i < t \right\} \right) dt \\
 &= 1 - \int_{[0,1]} (t^n + nt^{n-1}(1-t)) dt = 1 + (n-1) \int_{[0,1]} t^n dt - n \int_{[0,1]} t^{n-1} dt \\
 &= \frac{n-1}{n+1}
 \end{aligned}$$

**3.** Le vendeur est donc indifférent entre les deux types d'enchères, elles lui procurent le même revenu. (On vient en fait d'étudier un cas particulier du théorème d'équivalence des revenus.)

**Exercice 7 (Entrant).**

**1.** Le sous forme extensive est représenté à la fin du corrigé.

**2.** Une stratégie pour le joueur 1 est une fonction  $s : \{I, P\} \rightarrow \{R, S\}$ . On désigne, comme à l'exercice 5,  $s$  par  $s(I) s(P)$ ; le joueur 1 possède donc les stratégies pures  $RR, RS, SR, SS$ . Le joueur 2 n'a à préciser son action que lorsque le joueur 1 reste. Il a deux stratégies, indexées par  $E$  et  $D$ .

Les stratégies de comportement du joueur 1 sont de la forme  $(\alpha, \beta)$ , où  $\alpha, \beta \in [0,1]$ ,  $\alpha$  indique la probabilité de jouer  $R$  si  $I$  est réalisé, et  $\beta$ , celle de  $R$  lorsque c'est  $P$  qui est réalisé. Celles du joueur 2 sont indexées par  $\gamma \in [0,1]$  et correspondent à la probabilité d'entrer  $E$  lorsque le joueur 1 reste.

Liens avec les stratégies mixtes : une stratégie mixte est de la forme  $p_1 RR + p_2 RS + p_3 SR + p_4 SS$  où les  $p_i \geq 0$  et  $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$ . Elle induit la stratégie de comportement  $(\alpha, \beta) = (p_1 + p_2, p_1 + p_3)$ . Réciproquement, on sait d'après le cours que les stratégies mixtes et celles de comportement coïncident ici. Mais retrouvons-le. Soit une stratégie de comportement  $(\alpha, \beta)$ ; elle est induite par  $p_1 = \min\{\alpha, \beta\}$ ,  $p_2 = \alpha - p_1$ ,  $p_3 = \beta - p_1$ ,  $p_4 = 1 - p_1 - p_2 - p_3$ . (Remarque : la correspondance n'est pas bijective,  $(\alpha, \beta) = (1/2, 1/2)$  est induite par  $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (0, 1/2, 1/2, 0)$  et  $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$ ; c'est parce que les stratégies mixtes sont décrites par un ensemble à 3 degrés de liberté et celles de comportement par un ensemble à 2 degrés de liberté.)

**3.** Dans le tableau du jeu sous forme normale, on a pris les moyennes des paiements par rapport à la réalisation aléatoire de  $I$  ou  $P$  (ici encore, comme à l'exercice 5) :

	$E$	$D$
$RR$	$(2, 2)$	$(4, 0)$
$RS$	$(4, 0)$	$(2, 2)$
$SR$	$(-2, 6)$	$(2, 2)$
$SS$	$(0, 4)$	$(0, 4)$

4.  $SR$  et  $SS$  sont strictement dominées par  $RR$  et ne seront pas jouées à l'équilibre (soit  $\alpha = 1$ , on joue toujours  $R$  en réponse à  $I$ ). Dans la matrice  $2 \times 2$  qui reste,

	$E$	$D$
$RR$	$(2, 2)$	$(4, 0)$
$RS$	$(4, 0)$	$(2, 2)$

il n'y a pas d'équilibre en stratégies pures, ni même d'équilibre semi-mixte. Par indifférence, on trouve avec les notations habituelles  $x = 1/2$  et  $y = 1/2$ , soit ici :  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1/2$ ,  $\gamma = 1/2$ . Commentaire : les paiements de l'unique équilibre sont  $(3, 1)$ , et c'est mieux que ce que le joueur 1 pourrait avoir en révélant son information et en jouant  $\alpha = 1$  et  $\beta = 0$ , c'est-à-dire  $RS$  (le joueur 2 profitant de cette révélation pour déterminer sa stratégie optimale,  $D$ ).

... C'est ici encore la même morale qu'à l'exercice 5 : la révélation seulement partielle de l'information peut être profitable. En cas d'innovation, la stratégie est claire, foncer. Mais en cas de non-innovation, une fois sur deux, on fonce, et une fois sur deux, on s'arrête, histoire de brouiller les cartes pour l'autre joueur.

### Exercice 8 (Sur la corrélation).

1.  $(a_1, b_1)$  et  $(a_2, b_2)$  sont les équilibres de Nash en stratégies pures. La somme des paiements associés est 14 dans les deux cas. Comme il n'y a pas d'équilibres semi-mixtes, on recherche les équilibres mixtes par indifférence, on obtient les conditions  $2y + 11(1 - y) = 12(1 - y)$  et  $12x = 11x + 2(1 - x)$ , soit l'unique équilibre mixte  $x = 2/3$  et  $y = 1/3$ , de paiements  $(8, 8)$  se sommant à 16.

2a.  $\Gamma(p)$  est le même jeu que  $G$ , à ceci près que les joueurs ont accès avant de jouer à l'information publique  $(a, b)$  (de loi  $p$ ), et que leurs paiements sont calculés en espérance par rapport à  $p$ .

Une stratégie pure pour le joueur  $i$  est toute application  $s_i : S_1 \times S_2 \rightarrow S_i$ .

Ici, comme on considère un jeu en un coup, les notions de stratégies mixtes et de comportement coïncident. Une telle stratégie pour le joueur  $i$  est toute application  $s_i : S_1 \times S_2 \rightarrow \Delta(S_i)$ , où  $\Delta(S_i)$  est l'ensemble des probabilités sur  $S_i$ .

2b. La manière la plus directe consiste à se souvenir que dans un jeu extensif, un équilibre de Nash induit un équilibre de Nash dans tout sous-jeu atteint avec probabilité strictement positive. Mais on peut aussi re-prouver ce résultat à la main, comme suit.

On note  $\pi = (\pi_1, \pi_2) : S_1 \times S_2 \rightarrow [0, 12]^2$  la fonction de paiement du jeu, et on l'étend multilinéairement à  $\Delta(S_1) \times \Delta(S_2)$ . On note la composante  $\sigma_1$  de l'équilibre comme  $\sigma_1 = [x_{1,1} \ x_{1,2} \ x_{2,1} \ x_{2,2}]$ , avec  $\sigma_1(a_i, b_j) = x_{i,j}$ , où  $x_{i,j} \in [0, 1]$ . Supposons  $p_{a_2, b_2} > 0$ ; on définit des déviations  $\sigma'_1$  par  $\sigma'_1 = [x_{1,1} \ x_{1,1} \ x_{1,1} \ 0]$  et  $\sigma'_1 = [x_{1,1} \ x_{1,1} \ x_{1,1} \ 1]$ . En écrivant la définition du fait que  $\sigma$  est équilibre de  $\Gamma(p)$ , à savoir,

$$\sum_{(a,b) \in S_1 \times S_2} p_{a,b} \pi_1(\sigma_1(a,b), \sigma_2(a,b)) \geq \sum_{(a,b) \in S_1 \times S_2} p_{a,b} \pi_1(\sigma'_1(a,b), \sigma_2(a,b))$$

et en simplifiant, il nous reste (grâce aux deux valeurs possibles pour  $\sigma'_1$ ) de manière équivalente que pour tout  $j = 1, 2$ ,

$$p_{a_2, b_2} \pi_1(a_j, y_{2,2}) \leq p_{a_2, b_2} \pi_1(x_{2,2}, y_{2,2})$$

(où l'on a noté  $y_{2,2}$  la probabilité  $\sigma_2(a, b)$  sur  $S_2$ ; l'équilibre induit est donc  $x_{2,2}, y_{2,2}$  ici). Comme l'on peut simplifier par  $p_{a_2, b_2} > 0$ , et que l'on peut faire de même pour les autres

couples  $(a,b)$ , et aussi pour l'autre joueur, on a bien prouvé l'équivalence demandée. On en déduit que les paiements possibles sont les combinaisons convexes selon  $p$  de paiements d'équilibres de Nash. Comme il n'y a que trois tels paiements (cf. question 1), on obtient toutes les combinaisons convexes de ces trois paiements,

$$\{p_1(2, 12) + p_2(12, 2) + p_3(8, 8), p_j \geq 0 \text{ pour tout } j \text{ et } p_1 + p_2 + p_3 = 1\}$$

Le point maximum pour la somme des paiements est  $(8, 8)$ , il est obtenu pour  $p_3 = 1$ .

**2c.** D'après la question précédente, il suffit de vérifier que  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ , donnés par  $\sigma_1 = [1100]$  et  $\sigma_2 = [1010]$  induit un équilibre pour tout couple  $(a,b)$  tel que  $p_{a,b} > 0$ . Il n'y a aucune condition sur  $p_{a_1, b_1}$  et  $p_{a_2, b_2}$ , car  $(a_1, b_1)$  et  $(a_2, b_2)$  sont des équilibres de Nash. En revanche, comme  $(a_1, b_2)$  et  $(a_2, b_1)$  n'en sont pas, on a  $p_{a_1, b_2} = p_{a_2, b_1} = 0$ .

Les  $p$  correspondant aux machines équilibrées sont donc ceux tels que  $p_{a_1, b_1} = x \in [0,1]$  et  $p_{a_2, b_2} = 1 - x$ .

Comme seuls les équilibres de Nash purs sont joués, l'équilibre canonique de chacune de ces machines a 14 pour somme des paiements.

**3a.** La seule chose qui change entre  $\Gamma'(p)$  et  $\Gamma(p)$ , c'est la quantité d'information qu'a chaque joueur. Ici, le joueur  $i$  n'a plus accès à tout le couple  $(a,b)$ , mais seulement à sa  $i$ -ème composante. Ainsi, chaque joueur n'a plus que quatre stratégies pures  $S_i \rightarrow S_i$ , que l'on note (par exemple pour le joueur 1) :  $\text{id}, a_1, a_2$  et  $a_1 \leftrightarrow a_2$ , désignant respectivement l'identité, la stratégie qui joue toujours  $a_1$ , celle qui joue toujours  $a_2$ , et celle qui échange  $a_1$  et  $a_2$ .

**3b.** Une machine est donc équilibrée si  $(\text{id}, \text{id})$  est un équilibre de  $\Gamma(p)$ . On prend  $p$  induit par les probabilités de l'équilibre de Nash mixte,

$$p = \begin{bmatrix} 2/9 & 4/9 \\ 1/9 & 2/9 \end{bmatrix}$$

Il est clair que l'équilibre canonique de ce  $\Gamma(p)$  donne les paiements du Nash mixte ; il s'agit de voir que  $\Gamma(p)$  est bien équilibrée.

La preuve va utiliser le fait que  $p$  est issue d'une distribution-produit, pour tout  $(a,b)$ ,  $p_{a,b} = p_a p_b$ . Montrons par exemple que le joueur 1 n'a pas de déviation profitable. Soit  $s_1$  une de ses stratégies,  $s_1 \neq \text{id}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{(a,b) \in S_1 \times S_2} p_{a,b} \pi_1(s_1(a), \text{id}(b)) &= \sum_{a \in S_1} \sum_{b \in S_2} p_a p_b \pi_1(s_1(a), b) \\ &= \sum_{a \in S_1} p_a \pi_1(s_1(a), [1/3 \ 2/3]) = \pi_1(\sigma'_1, [1/3 \ 2/3]) \end{aligned}$$

où

$$\sigma'_1 = \begin{cases} [1 \ 0] & \text{si } s_1 \text{ est } a_1, \\ [0 \ 1] & \text{si } s_1 \text{ est } a_2, \\ [1/3 \ 2/3] & \text{si } s_1 \text{ est } a_1 \leftrightarrow a_2. \end{cases}$$

En tout état de cause,  $\sigma'_1$  n'est pas la distribution  $[2/3 \ 1/3]$  obtenue dans le Nash mixte ; et donc, lorsque  $s_1 \neq \text{id}$ ,  $\pi_1(\sigma'_1, [1/3 \ 2/3]) < \pi_1([2/3 \ 1/3], [1/3 \ 2/3])$ , ce dernier étant le paiement de  $(\text{id}, \text{id})$ .

Le joueur 1 n'a pas de déviation profitable, et de même pour le joueur 2 : la machine est

équilibrée.

**3c.** Le paiement de (id, id) est  $(25/3, 25/3)$ .

Calculons les paiements du joueur 1 pour les profils  $(a_1, \text{id})$ ,  $(a_2, \text{id})$ , et  $(a_1 \leftrightarrow a_2, \text{id})$ , et montrons qu'ils sont tous trois plus petits que  $25/3$ .  $(a_1, \text{id})$  et  $(a_2, \text{id})$  donnent tous deux 8 au joueur 1,  $(a_1 \leftrightarrow a_2, \text{id})$  procure  $23/3$ . Le joueur 1 n'a pas de déviation profitable.

Par symétrie, il en est de même pour le joueur 2, et cette machine est effectivement équilibrée. La somme des paiements est  $50/3$ , ce qui est supérieur à toutes les sommes trouvées ci-dessus (14 ou 16).

**3d.** Soit  $\varphi : \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2\}$ ; par définition d'une machine équilibrée, on a

$$\begin{aligned} \forall \varphi, \quad \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 p_{a_i, b_j} \pi_1(a_{\varphi(i)}, b_j) &\leq \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 p_{a_i, b_j} \pi_1(a_i, b_j) \\ \forall \varphi, \quad \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 p_{a_i, b_j} \pi_2(a_i, b_{\varphi(j)}) &\leq \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 p_{a_i, b_j} \pi_2(a_i, b_j) \end{aligned}$$

soit, notant  $a_{-i}$  l'action qui n'est pas  $a_i$  pour  $i = 1, 2$  (et de même pour les  $b_j$ ),

$$(1) \quad \forall i = 1, 2, \quad \sum_{j=1}^2 p_{a_i, b_j} \pi_1(a_{-i}, b_j) \leq \sum_{j=1}^2 p_{a_i, b_j} \pi_1(a_i, b_j)$$

$$(2) \quad \forall j = 1, 2, \quad \sum_{i=1}^2 p_{a_i, b_j} \pi_2(a_i, b_{-j}) \leq \sum_{i=1}^2 p_{a_i, b_j} \pi_2(a_i, b_j)$$

soit encore, en notant  $(A, B)$  un couple de variables aléatoires distribué selon  $p$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\pi_1(\psi_1(A), B) | A] &\leq \mathbb{E}[\pi_1(A, B) | A] \\ \mathbb{E}[\pi_2(A, \psi_2(B)) | B] &\leq \mathbb{E}[\pi_2(A, B) | B] \end{aligned}$$

Ce sont les équations (1) et (2) que nous exploiterons pour le reste de la question. Cela nous fait quatre conditions sur  $p$  écrit comme  $[p_{ij}]$  pour alléger les notations,

$$\begin{aligned} 0p_{11} + 12p_{12} &\leq 2p_{11} + 11p_{12}, & 2p_{21} + 11p_{22} &\leq 0p_{21} + 12p_{12} \\ 11p_{11} + 2p_{21} &\leq 12p_{11} + 0p_{21}, & 12p_{12} + 0p_{22} &\leq 11p_{12} + 2p_{22} \end{aligned}$$

soit finalement les conditions nécessaires et suffisantes sur  $p$  pour avoir une machine équilibrée,

$$p_{12} \leq 2p_{11}, \quad 2p_{21} \leq p_{22}, \quad 2p_{21} \leq p_{11}, \quad p_{12} \leq 2p_{22}$$

Pour maximiser la somme des paiements d'équilibre canonique, on met  $p_{21}$  le plus petit possible ( $p_{21} = 0$  est possible), et  $p_{12}$  le plus grand possible (en respectant les contraintes  $p_{12} \leq 2p_{11}$  et  $p_{12} \leq 2p_{22}$ ). On prend ainsi  $p_{12} = 2p_{11} = 2p_{22}$  et  $p_{21} = 0$ , soit

$$p = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

de paiement canonique associé 18 (donc meilleur que tous les paiements d'équilibres obtenus depuis le début de l'exercice).

### Exercice 9 (Un jeu répété deux fois).

On considère le jeu suivant (modifiant et remplaçant celui de l'énoncé initial) :

	$G$	$M$	$D$
$G$	(5, 5)	(2, 2)	(10, 3)
$M$	(1, 1)	(4, 4)	(2, 0)
$D$	(3, 9)	(1, 6)	(8, 8)

1. Indiquer les équilibres du jeu en un coup.
2. Prouver que dans le jeu répété deux fois, de fonction de paiement  $(1 - \delta)g_1 + \delta g_2$ , où  $g_1$  désigne le paiement du couple des premiers coups et  $g_2$  celui du couple des seconds, le couple de stratégies ci-dessous est un ESP pour  $\delta \geq \delta_0$  ( $\delta_0$  à préciser),
  - jouer  $(D, D)$  au premier coup,
  - si  $(D, D)$  a bien été joué, jouer  $(G, G)$ ; et sinon, chacun joue sa probabilité de l'équilibre de Nash mixte.

Tout le sel de cet exercice est que  $(D, D)$ , couple de stratégies éliminées par élimination itérée des stratégies strictement dominées, est joué dans un équilibre ! Pas un équilibre du jeu *one-shot*, bien sûr, mais un équilibre du jeu répété avec escompte. (Remarque : le paramètre d'escompte modélise les taux d'intérêt, une somme  $x$  aujourd'hui vaut une certaine somme  $x' = (1 + \varepsilon)x$  demain.)

1. La colonne  $D$  est dominée par la colonne  $G$ , la ligne  $D$  est également dominée (par  $G$ ). Dans le jeu  $2 \times 2$  qui reste, le plus simple est de procéder par indifférence, vu l'absence claire d'équilibres semi-mixtes.

Cherchons les équilibres mixtes : avec les notations habituelles,  $x$  est pris tel que le joueur-colonne soit indifférent entre ses deux actions, soit  $5x + 1 - x = 2x + 4(1 - x)$ ,  $x = 1/2$ ; et de même,  $y = 1/3$ .

Ce qui nous donne deux équilibres en stratégies pures,  $(G, G)$  et  $(M, M)$ , et un unique équilibre mixte,  $((1/2)G + (1/2)M, (1/3)G + (2/3)M)$ .

2. Vu la simultanéité des coups, il n'y a (que) neuf sous-jeux stricts dans le jeu répété deux fois : c'est à chaque fois le jeu *one-shot* de départ, indexé par le couple de premiers coups. Une stratégie dans le jeu en deux coups consiste *a priori* en l'indication du premier coup, et du coup joué à chacun des neufs nœuds de l'arbre de jeu auxquels on peut parvenir après le premier coup (indexés par le couple de premiers coups, qui est l'information dont on dispose). Il est clair que le couple de stratégies proposées (à savoir, jouer  $D$ , puis si on arrive au nœud indexé par  $(D, D)$ , jouer  $G$  et sinon, dans les 8 autres nœuds, jouer son équilibre de Nash mixte) induit<sup>1</sup> des équilibres de Nash dans tous ces sous-jeux, ou le Nash pur  $(G, G)$  ou le Nash mixte; et ce, à cause de la forme additive en  $g_1$  et  $g_2$  des paiements finaux.

Bref, ici, tout le problème ici est donc de prouver que le couple de stratégies est bien un équilibre de Nash du jeu tout entier. (C'est là que la condition sur  $\delta$  va apparaître.) Avant de

---

1. Attention ! Ce n'est pas le cas des stratégies qui seraient : jouer  $D$ , puis si l'adversaire a joué  $D$ , jouer  $G$  et sinon, son équilibre de Nash mixte; car par exemple, la stratégie induite dans le sous-jeu indexé par  $(D, M)$  est  $((1/2)G + (1/2)M, G)$ , qui n'est pas un équilibre. Ces stratégies, jouant l'une contre l'autre, font que le jeu se déroule comme si c'étaient les stratégies originelles qui interagissaient; mais en sous-jeux, elles se comportent différemment. *En fait, elles se comportent différemment sur des sous-jeux non atteints !*

commencer, notons que le couple proposé entraîne un paiement de  $8(1 - \delta) + 5\delta$  pour chaque joueur.

On regarde en premier lieu quand le joueur-colonne n'a pas de déviation profitable (en stratégies pures, donc mixtes).

Puisque maintenant on s'intéresse au jeu tout entier, et plus aux sous-jeux, on peut donner une forme réduite de la stratégie du joueur-ligne : jouer  $D$ , puis  $G$  si le joueur-colonne a aussi joué  $D$  précédemment,  $(1/2)G + (1/2)M$  sinon. La forme réduite des stratégies alternatives du joueur-colonne sont *a priori* de la même forme  $B\psi(G)\psi(M)\psi(D)$ , où  $B, \psi(G), \psi(M), \psi(D) \in \{G, M, D\}$ ,  $B$  désigne le coup au premier jeu, et  $\psi(A)$  le coup au second jeu, en fonction du coup  $A$  du joueur-ligne au premier jeu. Mais ici on a fixé la stratégie du joueur-ligne, on aura donc toujours  $A = D$ , il suffit de spécifier la stratégie alternative sous la forme  $B\psi(D)$ ; et on se retrouve à étudier 8 déviations possibles (celles à la stratégie originelle induite  $DG$ ).

Cas  $B = D$  : la meilleure réponse à  $G$  pour le joueur-colonne dans le jeu *one-shot* est  $G$ , de sorte qu'aucune stratégie alternative  $D\psi(D)$  n'obtient de meilleur paiement que la stratégie originelle  $DG$ .

Cas  $B = M$  : les joueurs obtiennent  $(1 - \delta)(1, 6)$  pour le premier coup, puis le joueur-colonne fait face à

	$G$	$M$	$D$
$(1/2)G + (1/2)M$	$(3, 3)$	$(3, 3)$	$(6, 3/2)$

de sorte que ses meilleurs coups sont de la forme  $\psi(D) = \alpha G + (1 - \alpha)M$ , avec paiements  $\delta(3, 3)$ . Au final, le joueur-colonne obtient  $6(1 - \delta) + 3\delta$ , ce qui est toujours moins que  $8(1 - \delta) + 5\delta$  (sans condition sur  $\delta$ ).

Cas  $B = G$  : paiements  $(1 - \delta)(3, 9)$  au premier coup, puis même jeu que ci-dessus, donc paiement au plus  $3\delta$  pour le joueur-colonne. Au final, il s'agit de comparer  $9(1 - \delta) + 3\delta$  à la valeur originelle  $8(1 - \delta) + 5\delta$ ; il n'y a pas de déviation profitable lorsque  $9(1 - \delta) + 3\delta \leq 8(1 - \delta) + 5\delta$ , soit  $\delta \geq 1/3$ .

Concernant les déviations du joueur-ligne maintenant, on montre comme avant qu'il suffit d'étudier celles de la forme  $A\varphi(D)$  (avec des notations évidentes). Le cas  $A = D$  est réglé immédiatement comme ci-dessus, ce sont les cas  $A = M$  ou  $A = G$  qui vont donner les conditions sur  $\delta$ . Dans ces cas, le joueur-colonne utilise sa probabilité issue du Nash mixte, de sorte que le joueur-ligne fait face à

	$(1/3)G + (2/3)M$
$G$	$(3, 3)$
$M$	$(3, 3)$
$D$	$(5/3, 7)$

de sorte que ses meilleurs coups sont de la forme  $\psi(D) = \alpha G + (1 - \alpha)M$ , avec paiements de  $\delta(3, 3)$ . Au tour précédent, il avait eu  $10(1 - \delta)$  avec  $A = G$  ou  $2(1 - \delta)$  avec  $A = M$ .

La condition sur  $\delta$  d'absence de déviation profitable s'écrit donc ici  $10(1 - \delta) + 3\delta \leq 8(1 - \delta) + 5\delta$ , soit  $\delta \geq 1/2$ .

Au final, en combinant les deux conditions résultant de l'analyse, l'ESP est obtenu pour  $\delta \geq \delta_0 = 1/2$ .