TD 3 théorie des jeux

ENPC 2005-2006

Jeux sous forme extensive, jeux bayésiens, jeux répétés.

1 Le Jeu de Gale

Soit un échiquier de taille $n \times m$, n et m étant deux entiers finis, l'un des deux étant supérieur à 1. Deux joueurs (I et II) choisissent alternativement une case sur l'échiquier. Lorsqu'une case (i, j) est choisie, toutes les cases (i', j') situées au Nord-Est, c'est à dire telles que $i' \geq i$ et $j' \geq j$, sont éliminées de l'échiquier.

Le joueur I commence le jeu et est déclaré perdant le joueur contraint de choisir la case $(1, 1)$.

1. Qu'est-ce qu'une stratégie pour un joueur? Qu'est-ce qu'une stratégie gagnante pour un joueur?
2. Montrer que le joueur I a une stratégie gagnante. (On ne demande pas de la trouver)
3. Construire une stratégie gagnante pour le joueur I dans le cas $n \times n$, et dans le cas $2 \times m$.
4. Etudier ce jeu quand n et/ou m est infini.

2 Le Jeu de Nim

Il s'agit d'un jeu à deux joueurs dont les règles sont les suivantes. On dispose d'un ensemble de n jetons. Le premier joueur partitionne cet ensemble en deux sous ensembles non-vides. Le second joueur choisit un de ces deux sous ensembles et le partionne à son tour. Le premier en choisit un, le partitionne etc ... Le jeu se termine dès qu'un joueur choisit un singleton et ce joueur est alors déclaré gagnant. Formellement:

Le jeu G_n^i est le jeu de Nim ou le joueur i joue en premier.

G_1^i : le joueur i gagne (et $j \neq i$ perd).

G_n^i $(n > 1)$: - le joueur i choisit $n_i \in \{1, \ldots, n-1\}$

- le joueur j choisit $n_j \in \{n_i, n - n_i\}$

- on joue le jeu $G_{n_j}^j$.

1- Expliciter les jeux G_2^1, G_3^1, G_4^1.

2- Soit N^α (resp. N^β) l'ensemble des entiers n pour lesquels le joueur i (resp. j) a une stratégie gagnante dans G_n^i.

Montrer que $1 \in N^\alpha$ et que pour $n \geq 2$

$n \in N^\alpha \iff \exists n_1, 1 \leq n_1 \leq n-1,\ n_1 \in N^\beta$ et $n - n_1 \in N^\beta$

$n \in N^\beta \iff \forall n_1, 1 \leq n_1 \leq n-1,\ n_1 \in N^\alpha$ ou $n - n_1 \in N^\alpha$

Montrer ensuite par récurrence que N^α est l'ensemble des entiers positifs de la forme $5p-1, 5p, 5p+1$ et que N^β est l'ensemble des entiers positifs de la forme $5p+2, 5p+3$.

3 Marchandage de Rubinstein

On considère deux joueurs qui veulent se partager un gateau dont la taille est normalisée à 1.

Jeu statique. Le joueur 1 commence par proposer au joueur 2 un partage $(x, 1-x)$ (il prend x pour lui). Le joueur 2 peut dire Oui ou Non. Si il accepte, les paiements sont $(x, 1-x)$ et $(0,0)$ sinon. Montrer que pour tout x, il existe un équilibre de Nash dans lequel le joueur 1 propose x et le joueur 2 accepte. Montrer qu'il y a un seul ESP et que le paiement est $(1,0)$.

Jeu dynamique. Les joueurs peuvent maintenant alterner offres et contre-offres, en proposant l'un après l'autre. Pour les inciter à arriver "vite" à un accord, on suppose que la taille du gateau est multipliée par un facteur $0 < \delta < 1$ à chaque étape. On considère Γ_T, le jeu à T étapes suivant.

Etape 1: Le joueur 1 propose au joueur 2 un partage $(x_1, 1-x_1)$. Le joueur 2 peut dire Oui ou Non. Si il accepte, les paiements sont $(x_1, 1-x_1)$, sinon on passe à l'étape 2.

Etape 2: Le joueur 2 propose au joueur 1 un partage $(x_2, 1-x_2)$. Le joueur 1 peut dire Oui ou Non. Si il accepte, les paiements sont $(\delta x_2, \delta(1-x_2))$, sinon on passe à l'étape 3.

Etape $t = 2k-1$: Le joueur 1 propose au joueur 2 un partage $(x_t, 1-x_t)$. Le joueur 2 peut dire Oui ou Non. Si il accepte, les paiements sont $(\delta^{t-1}x_t, \delta^{t-1}(1-x_t))$, sinon on passe à l'étape $t+1$.

Etape $t = 2k$: Le joueur 2 propose au joueur 1 un partage $(x_t, 1-x_t)$. Le joueur 1 peut dire Oui ou Non. Si il accepte, les paiements sont $(\delta^{t-1}x_t, \delta^{t-1}(1-x_t))$, sinon on passe à l'étape $t+1$.

Si toutes les offres sont refusées, la paiment final est $(0,0)$.

Le but est de résoudre Γ_T par récurrence amont et de trouver ses paiements d'ESP.

1- On considère le jeu $\Gamma_2(x,y)$, avec $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+y \leq 1$, définit comme suit.

Etape 1: Le joueur 1 propose au joueur 2 un partage $(x_1, 1-x_1)$. Le joueur 2 peut dire Oui ou Non. Si il accepte, les paiements sont $(x_1, 1-x_1)$, sinon on passe à l'étape 2.

Etape 2: Le joueur 2 propose au joueur 1 un partage $(x_2, 1-x_2)$. Le joueur 1 peut dire Oui ou Non. Si il accepte, les paiements sont $(\delta x_2, \delta(1-x_2))$, sinon les paiements sont $(\delta^2 x, \delta^2 y)$.

Chercher les ESP de $\Gamma_2(x,y)$ par récurrence amont.

2- On note maintenant $U_T = (u_T, v_T)$ un paiement d'ESP de Γ_T pour tout T. Donner une relation de récurrence entre U_T et U_{T-2}. Calculer U_T et sa limite quand T tend vers l'infini.

4 Bataille des sexes avec option d'entrée

Soit le jeu BS de la bataille des sexes suivant:

	A	B
A	3,1	0,0
B	0,0	1,3

1) Quels sont les équilibres de Nash (purs et mixtes) du jeu BS et les paiements correspondants?

On considère le jeu Γ dans lequel en première étape, le joueur 1 (joueur ligne) a la possibilité d'entrer dans le jeu BS ou non. S'il refuse de jouer, les paiements sont (2,2).

2) Représenter le jeu Γ sous forme extensive.

3) Mettre le jeu sous forme normale.

4) Quels sont les équilibres de Nash (purs et mixtes) du jeu Γ?

5) Quels sont les équilibres parfaits en sous-jeux du jeu Γ?

6) Quel est l'unique équilibre qui subsiste après élimination itérée des stratégies faiblement dominées? Quel argument soutient cet équilibre? Expliquer.

5 Transmission d'information

On considère une interaction à deux joueurs dans laquelle un état de la nature $k = 1, 2$ est choisi au hasard de manière équiprobable. Cet état est observé par le joueur 1 mais pas par le joueur 2. Le joueur 1 doit alors envoyer un message $m \in \{a, b\}$ au joueur 2. Le joueur 2 devra choisir une action $s \in \{G, M, D\}$. Le paiement de chaque joueur dépend uniquement de k et s. Les couples de paiements sont les suivants.

État $k = 1$: $G \to (0, 3)$; $M \to (1, 2)$; $D \to (0, 0)$.

État $k = 2$: $G \to (0, 0)$; $M \to (1, 2)$; $D \to (1, 6)$.

1) Écrire la forme extensive de ce jeu en précisant les espaces de stratégies. Combien y a t-il de sous-jeux propres?

2) Déterminer les équilibres en stratégies pures de ce jeu. On distinguera notamment suivant le nombre (1 ou 2) de messages différents envoyés par le joueur 1. Calculer les paiements d'équilibres pour chaque joueur. Quel est l'équilibre le plus favorable au joueur 1?

3) Montrer que le couple de stratégies suivant est un équilibre.

Joueur 1 : jouer a si $k = 1$ et (a avec probabilité 1/2; b avec probabilité 1/2) si $k = 2$; Joueur 2 : jouer M si a et D si b.

Calculer le paiement d'équilibre. Le joueur 1 a t-il intérêt à révéler son information (complètement, pas du tout, partiellement)?

6 Enchères au premier prix et au deuxième prix

Une unité d'un bien est mise aux enchères. Il y a n acheteurs potentiels et l'acheteur i a une valuation $\theta_i \geq 0$ pour ce bien. La procédure d'enchère est la suivante : chaque acheteur soumet une offre écrite sous pli scellé b_i. Les plis sont transmis à un commissaire priseur. L'acheteur ayant soumis l'offre la plus haute remporte le bien. Dans le cas de l'enchère au premier prix, il paye un prix égal à l'offre qu'il a soumise. Dans le cas de l'enchère au second prix, il paye un prix égal à la seconde plus haute offre. En cas de gagnants ex-aequo, on tire au sort celui qui remporte le bien. On suppose que les valuations (types des acheteurs) sont uniformément répartis sur $[0, 1]$. Chaque joueur est informé de son type mais pas de celui des autres joueurs. Toutefois, le fait que les types suivent une loi uniforme sur $[0, 1]$. est une information publique.

1) Enchère au premier prix. Montrer qu'annoncer $b(\theta_i) = (n - 1) / n \cdot \theta_i$ pour tous les joueurs est un équilibre de Nash. Déterminer le prix de vente espéré.

2) Enchère au second prix. Montrer qu'annoncer son évaluation $b(\theta_i) = \theta_i$ pour tous les joueurs est un équilibre de Nash. Déterminer le prix de vente espéré.

3) Quel type d'enchère choisiriez-vous pour vendre un de vos biens précieux?

7 Entrant

On considère deux entreprises, l'une en place sur le marché (entreprise 1) et l'autre un entrant potentiel (entreprise 2). Selon un choc aléatoire (décidé par la nature), l'entreprise 1 peut faire une innovation technologique (I) ou pas (P). Les événements I et P ont chacun probabilité 1/2. Si I est réalisé, l'entreprise 1 sera en mesure de battre n'importe quel concurrent.

Le déroulement du jeu est le suivant.

- I ou P se réalise de manière équiprobable. L'entreprise 1 est informée de cette réalisation mais pas l'entreprise 2.
- L'entreprise 1 décide de sortir du marché (S) ou de rester (R). Si elle sort, l'entreprise 1 fait un bénéfice de 0 et l'entreprise 2 (en position de monopole) fait un bénéfice de 4.
- Ayant observé le choix de l'entreprise 1, si celle-ci reste sur le marché, l'entreprise 2 choisit d'entrer sur le marché (E) et de faire concurrence à 1 ou de rester en dehors (D)
  - Si l'entreprise 2 reste en dehors, le bénéfice de l'entreprise 1 est de 4 et celui de l'entreprise 2 de 0.
  - Si l'entreprise 2 entre et que 1 est réalisé, le bénéfice de l'entreprise 1 est de 8 et celui de l'entreprise 2 de -4.
  - Si l'entreprise 2 entre et que P est réalisé, le bénéfice de l'entreprise 1 est de -4 et celui de l'entreprise 2 de 8.

1. Modéliser cette situation par un jeu sous forme extensive. Dessiner l'arbre complet du jeu.
2. Préciser les ensembles de stratégies pures et de comportement.
3. Donner la forme normale de ce jeu.
4. Calculer les équilibres et commenter.

8 Sur la corrélation

Soit le jeu G suivant.

	b_1	b_2
a_1	2,12	11,11
a_2	0,0	12,2

1- Chercher tous les équilibres de Nash de ce jeu, puis celui qui maximise la somme des paiements.

2- Les joueurs aimeraient se mettre d'accord sur les stratégies à employer afin d'obtenir les meilleurs paiements possibles mais n'y parviennent pas. Ils décident de s'en remettre à une machine impartiale. On note $S_1 = \{a_1, a_2\}$, $S_2 = \{b_1, b_2\}$. Soit $p \in \Delta(S_1 \times S_2)$. La machine tire au hasard un couple (a, b) selon la probabilité p. Le couple est annoncé au deux joueurs qui jouent alors G.

2.a- Définir le jeu $\Gamma(p)$ ainsi décrit. Préciser les stratégies pures, mixtes et de comportement.

2.b- Montrer que $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ est un équilibre de $\Gamma(p)$ si et seulement si pour tout couple (a, b) tel que $p_{a,b} > 0$, σ induit un équilibre de G après l'annonce de (a, b). Quel est l'ensemble des paiements que l'on peut obtenir par des équilibres de $\Gamma(p)$ lorsque p varie? Chercher le point qui maximise la somme des paiements.

2.c- On dit que la machine est *équilibrée* si les stratégies qui consistent à jouer a pour le joueur 1 et b pour le joueur 2 lorsque le couple (a, b) est annoncé, forment un équilibre de $\Gamma(p)$. A quelle condition machine est-elle équilibrée ? Parmi l'ensemble des machines équilibrées, chercher celle dont l'équilibre associé maximise la somme des paiements.

3- On modifie maintenant le fonctionnement de la machine en supposant que si le couple (a, b) est tiré, a seulement est annoncé au joueur 1 et b seulement au joueur 2.

3.a- Définir le jeu $\Gamma'(p)$ ainsi décrit en précisant les ensembles de stratégies.

3.b- On dit encore que la machine est équilibrée si les stratégies: jouer a si a est annoncé pour le joueur 1 et jouer b si b est annoncé pour le joueur 2, forment un équilibre de $\Gamma'(p)$. Montrer que l'on peut trouver une machine équilibrée qui donne les paiements de l'équilibre mixte de G.

3.c- Montrer que la machine telle que $p_{a_2,b_1} = 0$ et $p_{a_1,b_1} = p_{a_1,b_2} = p_{a_2,b_2} = 1/3$ est équilibrée. Comparer le paiement associé (du point de vue de la somme) avec les équilibres trouvés ci-dessus.

3.d- Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une machine soit équilibrée. Chercher celle qui maximise la somme des paiements d'équilibre canonique parmi les machines équilibrées.

9 Un jeu répété deux fois

Soit le jeu:

	G	M	D
G	5,4	0,0	2,2
M	5,1	4,1	0,0
D	3,0	-1,2	1,-1

1- Chercher tous les équilibres de ce jeu.

2- On répète le jeu deux fois. Les gains sont escomptés au taux δ : $g_i^1 + \delta g_i^2$. Montrer que le couple de stratégies défini par:

- jouer (D, D) au premier coup;
- jouer au deuxième coup:

  -(M, G) si (D, D) a bien été joué;

  -le Nash mixte sinon.

est un équilibre sous-jeu parfait pour $\delta \geq 7/9$.

10 Un jeu répété n fois

Soit le jeu:

	h	m	b
h	3,3	2,4	-1,-1
m	4,2	1,1	-1,-1
b	-1,-1	-1,-1	0,0

1- Déterminer les équilibres de G.

2- Soit G_n le jeu répété n fois (le gain global est la moyenne des gains). Montrer que: $\forall n \geq 4$, $\forall (N_1, N_2, N_3, N_4)$ des entiers plus grands que 1 tels que $\sum_{i=1}^{4} N_i = n$, le couple de stratégies définies par:

- jouer (h, h) N_1 fois, puis (m, h) N_2 fois, puis (h, m) N_3 fois, puis (b, b) N_4 fois, et ceci tant que l'autre fait de même;
- jouer b jusqu'a la fin du jeu si l'autre dévie.

est un équilibre de G_n. Est-il sous-jeu parfait ?

3- En déduire que pour tout u dans co$\{(3,3); (4,2); (2,4); (0,0)\}$, u est limite de paiements d'équilibres de G_n quand n tends vers l'infini.