Sur l'inégalité de van Trees, dans un cadre classique et dans un cadre à la Le Cam.

Gilles Stoltz (CNRS - ENS - HEC)

22 février 2008.

I. Borne de Cramer_Rao ou "information inequality".

Cadre général : $\mathbb{P}_\theta$, $\theta \in \Theta$ une famille de lois sur $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, toutes dominées par une mesure μ ; on note f_θ la densité, $\mathbb{P}_\theta = f_\theta \cdot \mu$; pour simplifier, on prend $\Theta \subset \mathbb{R}$ (et on pourra réfléchir plus tard au cas multivarié).

1. Cadre classique.

(Id est : quand l'on s'autorise à considérer les densités comme ayant un sens ponctuel.)

On suppose que μ-pp (en x), $\theta \mapsto f_\theta(x)$ est absolument continue, de dérivée (définie d-pp, où d est la mesure de Lebesgue) notée $f'_\theta(x)$.

Ce qu'on voit dans les livres :

$$I(\theta) = \mathbb{E}_\theta\left[\left((\log f_\theta)'(x)\right)^2\right]$$

information de Fisher, $\in [0, +\infty]$

(HC) Hypothèse sur $(\mathbb{P}_\theta)$: Pour toute statistique T tq. $T \in \mathbb{L}^2(\mathbb{P}_\theta)$ pour tout θ, on a :

$$\forall \theta \in \Theta, \quad \frac{\partial}{\partial\theta} \mathbb{E}_\theta[T] = \frac{\partial}{\partial\theta} \int T(x)\, f_\theta(x)\, d\mu(x)$$

$$= \int T(x)\, f'_\theta(x)\, d\mu(x)$$

$$= \int T(x) (\log f_\theta)'(x)\, f_\theta(x)\, d\mu(x) = \mathbb{E}_\theta\left[T\,(\log f_\theta)'\right]$$

Pbs : — justifier échange $\int$ et $\frac{\partial}{\partial\theta}$

— a-t-on vraiment (cf. $0 \times \infty = 0$...) $\int T(x) f'_\theta(x)\, d\mu(x)$

$\stackrel{?}{=} \int T(x) \frac{f'_\theta(x)}{f_\theta(x)} \cdot f_\theta(x)\, d\mu(x)$

$\uparrow$ $(\log f_\theta)'(x)$

↳ oui, p. ex. si $\forall\theta$, $f_\theta(x) > 0$ μ-pp en x

et s'il y a une condition de domination comme $T \left(\sup_{\theta' \in U_\theta} |f'_{\theta'}| \right) \in \mathbb{L}^1(\mu)$

pour tout θ (où U_θ est un voisinage de θ); mais f_θ, f'_θ définies pp. et sup non dénombrable....

Th (Cramer-Rao, version classique)

Sous l'hyp. (HC), on a, pour toute statistique $T \in \mathbb{L}^2(\mathbb{P}_\theta)$ $\forall\theta$ estimant sans biais $g(\theta)$, ie, $\forall\theta$, $E_\theta[T] = g(\theta)$:

g est dérivable et $\forall\theta$, $\mathrm{Var}_\theta(T) \geq \frac{(g'(\theta))^2}{I(\theta)}$.

preuve : Par (HC),

$$(g'(\theta))^2 = \left(E_\theta \left[T (\log f_\theta)' \right] \right)^2$$
$$= \left(\mathrm{Cov}_\theta \left(T, (\log f_\theta)' \right) \right)^2$$
$$\leq \mathrm{Var}_\theta(T)\; E_\theta\left((\log f_\theta)' \right)^2$$
$$= \mathrm{Var}_\theta(T) \cdot I(\theta)$$

Car par (HC), $E_\theta (\log f_\theta)' = \frac{\partial}{\partial\theta} 1 = 0$

Cauchy-Schwarz

La preuve consiste donc à avoir la bonne hyp (HC) et à employer Cauchy-Schwarz.

Note : j'ai essayé pendant la préparation de cet exposé de trouver un jeu de conditions sympas (sur les f_θ) pour que (HC) soit vraie. N'y arrivant pas, et pour préserver ma santé mentale, je vais recueillir vos suggestions pendant l'exposé !

α. Cadre Le Cam (Id est : les densités n'ont de sens qu'intégrées)

Il n'est plus question de s'intéresser à la dérivabilité ponctuelle des densités !

Df : $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ est différentiable en moyenne quadratique en θ_0 si $\theta \mapsto \sqrt{f_\theta}$ est différentiable en norme $\mathbb{L}^2(\mu)$ en θ_0 :

il existe $\dot{\xi}_{\theta_0} \in \mathbb{L}^2(\mu)$ tq. $r_\theta = \sqrt{f_\theta} - \left(\sqrt{f_{\theta_0}} + (\theta-\theta_0)\,\dot{\xi}_{\theta_0}\right)$

vérifie

$$\| r_\theta \|_2 = \left(\int r_\theta^2 \, d\mu\right)^{1/2} = o(|\theta-\theta_0|).$$

$(\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ DMQ si DMQ en tout θ_0.

Not : On notera $\xi_\theta = \sqrt{f_\theta}$ dans la suite.

Heuristique : $\dot{\xi}_\theta \overset{?}{=} (\sqrt{f_\theta})' \overset{?}{=} \dfrac{f_\theta'}{2\sqrt{f_\theta}} = \dfrac{f_\theta'}{2\xi_\theta}$; soit $\dfrac{f_\theta'}{f_\theta} \overset{?}{=} (\log f_\theta)'$

$$\overset{?}{=} \frac{2\xi_\theta \dot{\xi}_\theta}{\xi_\theta^2} = \frac{2\dot{\xi}_\theta}{\xi_\theta}$$

et $\mathbb{E}_\theta\left(\left((\log f_\theta)'\right)^2\right)$

$$\overset{?}{=} \int \frac{4(\dot{\xi}_\theta)^2}{\xi_\theta^2}\,\xi_\theta^2\,d\mu$$

$$\overset{?}{=} 4\,\mu(\dot{\xi}_\theta)^2$$

Df : Info de Fisher d'un modèle DMQ :

$$I(\theta) = 4\,\mu(\dot{\xi}_\theta)^2.$$

Rq : toujours bien définie, sans aucune prise de tête.

Lm ("dead cat theorem") : si $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ DMQ en θ_0 et si $\exists\, U_{\theta_0}$ voisinage de θ_0 tq. $C^2 = \sup_{\theta\in U_{\theta_0}} \mathbb{P}_\theta T^2 < +\infty$, alors

$\gamma : \theta \mapsto \mathbb{P}_\theta T$ est dérivable en θ_0, de dérivée $\gamma'(\theta_0) = 2\,\mu(\dot{\xi}_{\theta_0}\,\xi_{\theta_0}\,T)$.

Rq: Ce lemme est bien sûr le pendant de l'hypothèse (HC) du cadre classique.

preuve : (On prend $\theta_0 = 0$ pour la commodité d'écriture ...)

$$\gamma(\theta) - \gamma(0) - 2\theta\,\mu(\xi_0 \dot{\xi}_0 T) \qquad \text{et} \quad r_\theta = \xi_\theta - \xi_0 - \theta \dot{\xi}_0$$

$$= \mu\Big(\underbrace{(\xi_\theta^2 - \xi_0^2 - 2\theta \xi_0 \dot{\xi}_0)}\, T \Big)$$

$$\text{ce terme} = (\xi_\theta - \xi_0)(\xi_\theta + \xi_0) - 2\theta \dot{\xi}_0 \cdot \xi_0$$

$$= r_\theta \xi_0 + \xi_\theta(\xi_\theta - \xi_0) - \theta \dot{\xi}_0 \xi_0$$

$$= r_\theta \xi_0 + r_\theta \xi_\theta + \theta \dot{\xi}_0(-\xi_0 + \xi_\theta)$$

d'où
$$|\gamma(\theta) - \gamma(0) - 2\theta\,\mu(\xi_0 \dot{\xi}_0 T)|$$
$$\leqslant \underbrace{|\mu(r_\theta(\xi_0 + \xi_\theta) T)|} + |\theta| \cdot \underbrace{|\mu(\dot{\xi}_0(\xi_\theta - \xi_0) T)|}_{\text{reste à voir que } o(1)}$$

$$\underset{\text{(Cauchy-Schwarz)}}{\leqslant} \|r_\theta\|_2 \left(\|\xi_0 T\|_2 + \|\xi_\theta T\|_2 \right) \leqslant 2C \|r_\theta\|_2 = o(\theta)$$

$\|\cdot\|_2$ = norme dans $\mathbb{L}^2(\mu)$

Pour l'autre terme : on découpe selon un seuil K,

— $$|\mu(\dot{\xi}_0(\xi_\theta - \xi_0) T \mathbb{1}_{[|T| \leq K]})| \leqslant K\, |\mu(\dot{\xi}_0(\xi_\theta - \xi_0))|$$
$$\underset{\text{(C-Schw)}}{\leqslant} K (\mu \dot{\xi}_0^2)^{1/2} \|\xi_\theta - \xi_0\|_2$$
$$= K (\mu \dot{\xi}_0^2)^{1/2} \|\underbrace{r_\theta - \theta \dot{\xi}_0}_{O(\theta)}\|_2$$

et — $$|\mu(\dot{\xi}_0(\xi_\theta - \xi_0) T \mathbb{1}_{[|T| > K]})|$$

$$\underset{\text{(C-Schw).}}{\leqslant} \underbrace{\left(\mu\, \dot{\xi}_0^2 \mathbb{1}_{[|T| > K]}\right)^{1/2}}_{\downarrow\ 0 \text{ qd } K \to +\infty} \Big(\underbrace{\|\xi_\theta T\|_2 + \|\xi_0 T\|_2}_{\leqslant 2C} \Big)$$

On choisit

K tq. seconde partie $< \varepsilon$ puis θ suff. petit pour que première partie $< \varepsilon$ aussi ;

au final, on prouve le caractère $o(1)$ et cela conclut la preuve.

Th (Cramer-Rao, dit aussi "information inequality") :

On suppose, comme dans le lemme, que $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ est DMQ en θ_0 et qu'il existe un voisinage U_{θ_0} de θ_0 tq. $C^2 = \sup_{\theta\in U_{\theta_0}} \mathbb{P}_\theta T^2 < +\infty$, et que de plus, $I(\theta_0) = 4\,\mu(\dot{\xi}_{\theta_0})^2 > 0$.

Alors,
$$\mathrm{Var}_{\theta_0} T \geq \frac{(\gamma'(\theta_0))^2}{I(\theta_0)}.$$

preuve: $T \equiv 1$ permet de voir par le lemme que $\mu\, \xi_{\theta_0} \dot{\xi}_{\theta_0} = 0$

Ici, par une autre application du lemme, on a
$$(\gamma'(\theta_0))^2 = 4\left(\mu\left(\dot{\xi}_{\theta_0}\xi_{\theta_0} T\right)\right)^2 = 4\left(\mu\left(\dot{\xi}_{\theta_0}\xi_{\theta_0}(T-\gamma(\theta_0))\right)\right)^2$$
$$\underset{(C\text{-Schw.})}{\leq} 4\,\mu(\dot{\xi}_{\theta_0}^2)\cdot \mu\left(\xi_0^2 (T-\gamma(\theta_0))^2\right)$$
$$= I(\theta_0)\cdot \mathrm{Var}_{\theta_0} T^2$$

$\longrightarrow$ c'est, en gros, les mêmes ficelles que dans le cas classique !

3. Liens entre conditions classiques et DMQ.

L'heuristique de la page 3 montre que l'on s'attend à
$$\dot{\xi}_\theta = \frac{f_\theta'}{2\sqrt{f_\theta}}\mathbb{1}_{\{f_\theta>0\}}$$
lorsque les f_θ vérifient un certain jeu de conditions. Par exemple (un cas très simple) :

Ex/Th: q une densité de proba sur $\mathbb{R}$ par rapport à la mesure de Lebesgue et $f_\theta = q(\cdot - \theta)$, ie, un modèle de translation ("shift family").

Si q absolument continue, de dérivée q' tq. $I_q = \lambda\left(\frac{(q')^2}{q}\mathbb{1}_{\{q>0\}}\right) < +\infty$
(rappel: λ est la mesure de Lebesgue),
alors la famille $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ est DMQ (en tout θ), de dérivée

$$\dot{\xi}_\theta = -\frac{1}{2} \frac{q'(\cdot - \theta)}{\sqrt{q(\cdot - \theta)}} \mathbb{1}_{\{q(\cdot - \theta) > 0\}}.$$

On a donc en part. : $I(\theta) = I_q$.

Rq: L'hyp. " q absolument continue " c'est du Le Cam,
l'hyp. " q dérivable partout " est en revanche une hyp. ponctuelle !

preuve: Tout étant invariant par translation, il suffit de faire la preuve en 0.
DMQ en 0 équivaut à ce que

$$\frac{\xi_\theta - \xi_0}{\theta} \xrightarrow[\theta \to 0]{} \dot{\xi}_0 \quad \text{dans } \mathbb{L}^2(d).$$

On va appliquer le lemme de Scheffé $\mathbb{L}^2$, que l'on rappelle au préalable :

Lm: Si (f_n) est une suite de $\mathbb{L}^2(d)$ tq. il existe $f \in \mathbb{L}^2(d)$ avec

(1) $f_n \to f$ sur $\{f > 0\}$ et (2) $\underline{\lim} \int f_n^2 \leq \int f^2$

alors $f_n \to f$ dans $\mathbb{L}^2(d)$.

preuve: $g_n = 2f_n^2 + 2f^2 - (f_n - f)^2$ est ≥ 0,

$\underline{\lim}\, g_n \geq 4f^2$ sur $\{f > 0\}$;

et $\underline{\lim}_{\text{sur } \{f=0\}} g_n = \underline{\lim}\, f_n^2 \geq 0$; or, $\underline{\lim} \int g_n \leq 4f^2$; il suffit d'appliquer le lemme de Fatou.

Ici, • q dérivable pp, donc en particulier, $\sqrt{q}$ dérivable pp sur $\{q > 0\}$ de dérivée $\frac{q'}{\sqrt{q}}$; ainsi,

sur $\{q > 0\}$, d-pp en x, $\frac{\xi_\theta(x) - \xi_0(x)}{\theta} \longrightarrow \dot{\xi}_0(x)$

sur $\{q = 0\}$, $\dot{\xi}_0 = 0$ pp.
$q' = 0$ pp

↳ le point (1) du lemme de Scheffé est vérifié.

- Pour le second point, on montre ci-dessous que pp, $\xi_\theta - \xi_0 = \int_0^\theta \dot{\xi}_s \, ds$

d'où par Jensen, $\frac{1}{\theta^2}(\xi_\theta - \xi_0)^2 \leq \frac{1}{\theta}\int_0^\theta (\dot{\xi}_s)^2 \, ds$

puis par Fubini-Tonelli, $\int \left(\frac{\xi_\theta - \xi_0}{\theta}\right)^2 d\lambda \leq \frac{1}{\theta}\int_0^\theta d(\dot{\xi}_s)^2 \, ds$

$$= I_q = \int (\dot{\xi}_0)^2 d\lambda$$

Il ne reste donc qu'à voir la représentation intégrale :

λ-pp en x : $\sqrt{q(x-\theta)} - \sqrt{q(x)} = \int_0^\theta -\frac{1}{2} \frac{q'(x-s)}{\sqrt{q(x-s)}} \mathbb{1}_{\{q(x-s)>0\}} ds$

Lm: il s'agit donc de voir que $\sqrt{q}$ est absolument continue, et de calculer sa dérivée ; ce n'est pas évident en passant par la déf. d'absolue continuité, on repasse plutôt par la caractérisation en termes d'intégrale de sa dérivée : $\eta > 0$ fixé,

- $q+\eta$ est tjs > 0, q dériv. pp, donc $\sqrt{q+\eta}$ dériv. pp. de dérivée $\frac{1}{2}\frac{q'}{\sqrt{q+\eta}}$;
- par ailleurs, $\sqrt{q+\eta}$ est abs. continue : soit $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tq. si $[a_i, b_i]$ disjoints tq. $\Sigma(b_i - a_i) < \delta$, alors $\Sigma \, |q(b_i) - q(a_i)| < \varepsilon$ (par abs. cont. de q) et $\Sigma \left| \sqrt{q(b_i)+\eta} - \sqrt{q(a_i)+\eta} \right|$

$$\leq \Sigma \frac{|q(b_i) - q(a_i)|}{\sqrt{q(b_i)+\eta} + \sqrt{q(a_i)+\eta}} \leq \frac{1}{2\eta} \Sigma |q(b_i) - q(a_i)|$$

$$\leq \varepsilon / 2\eta$$

- donc $\sqrt{q(b)+\eta} - \sqrt{q(a)+\eta} = \int_a^b \frac{q'(s)}{2\sqrt{q(s)+\eta}} ds$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \text{pp.}$$

$$\sqrt{q(b)} - \sqrt{q(a)} \qquad \frac{q'(s)}{2\sqrt{q(s)}} \mathbb{1}_{\{q(s)>0\}}$$

car $q' = 0$ pp. sur $\{q=0\}$
+ domination par la limite.

Au final, par convergence dominée :

$$\sqrt{q(b)} - \sqrt{q(a)} = \int_a^b \frac{q'(s)}{2\sqrt{q(s)}} \mathbb{1}_{\{q(s)>0\}} ds.$$

II. L'inégalité de van Trees.

Cadre général. Toujours la famille $\mathbb{P}_\theta$, $\theta \in \Theta$ sur $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, dominée par μ, et $\Theta \subset \mathbb{R}$;
Nouvelle donnée : une proba sur $\mathbb{R}$, de densité q ;
et de support $\subset \Theta$?

Enoncé : T un estimateur de θ (sans biais ou biaisé)
Alors

$$\int_\Theta \mathbb{P}_\theta (T-\theta)^2 \, q(\theta) \, d\theta \geqslant \frac{1}{\int_\Theta I(\theta) q(\theta) d\theta + I_q}$$

C'est, en un certain sens, une version bayésienne de la borne de Cramer-Rao.
(I_q doit être défini dans le cadre classique, voir plus bas ; il a été défini en page 5 dans le cadre Le Cam.)

1. van Trees comme corollaire de la borne de Cramer-Rao (cadre Le Cam).

On considère la famille de lois $\mathbb{M}_\alpha$ sur $\mathcal{X} \times \Theta$ de densités par rapport à $\mu \otimes \lambda$ données par :

$$m_\alpha(x, \theta) = q(\theta - \alpha) f_{\theta - \alpha}(x).$$

(pour α suffisamment petit au moins, voir plus bas)

Si q est abs. continue, la shift family construite sur q est DMQ ; la dérivée $\mathbb{L}^2$ de $\eta_\alpha = \sqrt{q(\cdot - \alpha)}$ est $\dot\eta_\alpha = - \frac{q'(\cdot - \alpha)}{\sqrt{q(\cdot - \alpha)}} \mathbb{1}_{\{q(\cdot - \alpha) > 0\}}$

comme calculé en page 6.

On suppose $\mathbb{P}_\theta$, $\theta \in \Theta$ DMQ ; la dérivée $\mathbb{L}^2$ des $\xi_\theta = \sqrt{f_\theta}$ est notée $\dot{\xi}_\theta$.

Sous des conditions supplémentaires précisées ci-dessous, on veut effectuer le raisonnement suivant :

- la famille $\mathbb{M}_\alpha$ est définie pour $|\alpha| < \delta$ et DMQ en $\alpha = 0$, de dérivée au sens $\mathbb{L}^2$ pour $\sqrt{m_\alpha}$ donnée par

$$\Delta(x,\theta) = \dot{\eta}_0(\theta)\, \xi_\theta(x) - \eta_0(\theta)\, \dot{\xi}_\theta(x)$$

(ressemble à la formule de dérivation usuelle des produits !)

- L'info de Fisher du modèle en $\alpha = 0$ vaut alors

$$I(\mathbb{M}_0) = I_q + \int I(\theta)\, q(\theta)\, d\theta \qquad \left(= 4\, \mu \otimes d\, (\Delta^2) \right).$$

- La borne de Cramer-Rao appliquée en $\alpha = 0$ (en montrant au préalable que $\gamma : \alpha \mapsto \mathbb{M}_\alpha^{(x,\theta)}(T(x) - \theta)$ admet -1 comme dérivée en $\alpha = 0$) donne : $\displaystyle\int_\Theta \mathbb{P}_\theta (T-\theta)^2\, q(\theta)\, d\theta \geq \mathrm{Var}_{\mathbb{M}_0}(T - \theta) \geq \frac{1}{I(\mathbb{M}_0)}$

ce qui conclut.

ou presque : on garde la preuve de DMQ en $\alpha = 0$ pour la fin.

Essayons de revoir ces points dans l'ordre et de donner une idée des hyp. y conduisant :

- q abs. cont. sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{Supp}\, q \subset \Theta$ et Θ ouvert de $\mathbb{R}$;
  en posant $f_\theta \equiv$ densité arbitraire /t à μ pour $\theta \notin \Theta$, on a que $\mathbb{M}_\alpha$ est en fait définie pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Calcul de $I(\mathbb{M}_0)$: l'inég. est triviale sauf si $I_q < +\infty$ et $\underbrace{\int I(\theta)\, q(\theta)\, d\theta}_{<+\infty}$, ce que l'on suppose désormais.

$$I(\mathbb{M}_0) = 4\, \mu \otimes d\, (\Delta^2) = 4 \Big(\int \underbrace{(\mu^x \xi_\theta(x))}_{=1}\, \dot{\eta}_0(\theta)\, d\theta + \int (\mu\, \dot{\xi}_\theta^2)\, q(\theta)\, d\theta$$
$$- 2 \int \dot{\eta}_0(\theta)\, \eta_0(\theta)\, (\mu^x \xi_\theta(x) \dot{\xi}_\theta(x))\, d\theta \Big)$$

La première intégrale vaut $I_q/4$, la seconde est $\frac{1}{4}\int I(\theta)\, q(\theta) d\theta$, la troisième est nulle par l'inég. d'info. On prouve juste l'application de Fubini :

$$\iint |\dot{\eta}_0(\theta)\eta_0(\theta)\xi_\theta(x)\dot{\xi}_\theta(x)|\, d\theta\, \mu(x) \quad < +\infty \; ;$$

en effet, par Cauchy-Schwr.,
$$\left(\iint |\quad|\right)^2 \leq \int q(\theta)\, \dot{\xi}_\theta(x)^2\, d\mu(x) d\theta \times \int f_\theta(x)\, \dot{\eta}_0(\theta)\, d\mu(x) d\theta$$
$$= \int I(\theta) q(\theta) d\theta \times I_q < +\infty .$$

– Pour appliquer l'inég. d'info, il s'agit que pour un voisinage U de 0, on ait

$$\sup_{\alpha\in U} \mathbb{M}_\alpha (T')^2 < +\infty \; , \quad \text{et } I(\mathbb{M}_0) > 0.$$

(où $T'(x,\theta) = T(x) - \theta$)

or, est borné par :
$$2\iint \left(T(x)^2 + \theta^2\right) f_{\theta-\alpha}(x)\, q(\theta-\alpha)\, d\theta\, d\mu(x)$$
$$= 2\int (\mathbb{P}_\theta T^2)\, q(\theta)\, d\theta + \int (\theta+\alpha)^2 q(\theta) d\theta$$
$$\leq 2\int (\mathbb{P}_\theta(T^2))\, q(\theta)\, d\theta + \alpha^2 + \int \theta^2 q(\theta) d\theta$$

On formule donc les hyp :

(H1) $\int (\mathbb{P}_\theta(T^2))\, q(\theta)\, d\theta < +\infty$

(H2) $\int \theta^2 q(\theta)\, d\theta < +\infty$.

de toute façon, on en a presque besoin pour que la qté que l'on minore dans Van Trees ait un sens !

On a alors $\gamma(\alpha) = \mathbb{M}_\alpha T' = \iint (T(x) - \theta)\, f_{\theta-\alpha}(x)\, q(\theta-\alpha)\, d\theta\, d\mu(x)$

(les interversions sont justifiées, cf. $T' \in \mathbb{L}^2(M_\alpha) \subset \mathbb{L}^1(M_\alpha)$)

$$= \int (\mathbb{P}_\theta T - \theta)\, q(\theta)\, d\theta \quad - \alpha$$

et $\gamma'(0) = -1$

Ça servira plus tard pour la preuve directe. Par ailleurs, on a aussi que $\gamma'(0) = 2\int \eta_0(\theta)\, \xi_\theta(x)\, \Delta(x,\theta)(T(x)-\theta)\, d\mu(x) d\theta$ par l'inég. d'info.

— Reste juste à voir que $(\mathbb{M}_\alpha)_{\alpha\in U}$ DMQ en $\alpha=0$:

$(f_\theta)_{\theta\in\Theta}$ et $(q(\cdot-\alpha))_\alpha$ DMQ :

$$\sqrt{f_{\theta-\alpha}(x)} = \sqrt{f_\theta(x)} - \alpha\,\dot{\xi}_\theta(x) + r_{f,\theta,\alpha}(x)$$

$$\sqrt{q(\theta-\alpha)} = \sqrt{q(\theta)} + \alpha\,\dot{\eta}_0(\theta) + r_{q,\alpha}(\theta)$$

avec $\mu^x\left(r_{f,\theta,\alpha}(x)\right)^2 = o(\alpha^2)$ pour tout θ

et $d^\theta\left(r_{q,\alpha}(\theta)\right)^2 = o(\alpha^2)$.

On étudie : $\dfrac{\sqrt{m_\alpha(x,\theta)}-\sqrt{m_0(x,\theta)}}{\alpha} - \Delta(x,\theta) = 6$ termes

$$= \frac{1}{\alpha} r_{q,\alpha}(\theta)\sqrt{f_{\theta-\alpha}(x)} + \frac{1}{\alpha} r_{f,\theta,\alpha}(x)\left(\sqrt{q(\theta)} - \alpha\dot{\eta}_0(\theta)\right) + \alpha\,\dot{\xi}_\theta(x)\dot{\eta}_0(\theta)$$

1^{er} terme : $\int (\quad)^2 d\mu(x)\,d\theta = \dfrac{1}{\alpha^2}\int \left(r_{q,\alpha}(\theta)\right)^2 d\theta = o(1)$ par déf $r_{q,\alpha}$

2^{e} groupe de termes : $\displaystyle\int (\quad)^2 d\mu(x)\,d\theta \leq 2\int \Bigg(\underbrace{\mu^x\frac{\left(r_{f,\theta,\alpha}(x)\right)^2}{\alpha^2}}_{\to 0}\Bigg)\left(q(\theta)+\alpha^2\dot{\eta}_0(\theta)^2\right) d\theta$ + domination ?

$$R_{\theta,\alpha} = \mu^x\left(r_{f,\theta,\alpha}(x)\right)^2 \leq 2\mu^x\left(\frac{\sqrt{f_{\theta-\alpha}(x)}-\sqrt{f_\theta(x)}}{\alpha}\right)^2 + 2\mu^x\left(\dot{\xi}_\theta(x)\right)^2$$

$\leq I(\theta) + \cdots$ et $I(\theta)$ tq. $\int I(\theta)q(\theta)d\theta < +\infty$.

On a presque une hyp. de domination ....

De même pour l'autre bout, $R_{\theta,\alpha} \leq \dfrac{4}{\alpha^2} + \cdots$

et $I_q = \displaystyle\int \frac{4}{\alpha^2}\alpha^2\dot{\eta}_0(\theta)^2 d\theta < +\infty$

$3^{ème}$ terme : $\alpha^2\displaystyle\int \dot{\xi}_\theta^2(x)\,\dot{\eta}_0(\theta)^2\,d\mu(x)\,d\theta$

$$= \alpha^2\int I(\theta)\,\dot{\eta}_0(\theta)^2\,d\theta = \alpha^2 \times \underline{\text{cste finie}}\ ?$$

Bref, ça gratte un peu aux entournures à la fin.
Mais on peut sauver tout ça en se souvenant que Cramer – Rao procède juste d'une application de Cauchy Schwarz ! On n'a pas besoin d'établir au passage que $(M_\alpha)_\alpha$ est DMQ en $\alpha=0$.

2. van Trees, preuve directe.

Inspirée de Gill & Levit '95 (qui présente le cas classique).

Sous les hyp. (H1) et (H2) + DMQ de $(f_\theta)_{\theta\in\Theta}$ + q abs. cont. avec $I_q<+\infty$, on a obtenu :

- que $\Delta(x,\theta) = \dot{\eta}_0(\theta)\,\xi_\theta(x) - \eta_0(\theta)\,\dot{\xi}_\theta(x)$ est bien définie ;

- avec $4\,\mu\otimes d\,(\Delta^2) = I_q + \int I(\theta)\,q(\theta)\,d\theta$;

- $\int_\Theta \mathbb{P}_\theta\,(T-\theta)^2 q(\theta)\,d\theta < +\infty$;

On va prouver : (*) $2\int \eta_0(\theta)\,\xi_\theta(x)\,\Delta(x,\theta)\,(T(x)-\theta)\,d\mu(x)\,d\theta = -1$
(cf. page 10)

D'où, par Cauchy-Schwarz :
$$\int_\Theta \mathbb{P}_\theta\,(T-\theta)^2\,q(\theta)\,d\theta \times \underbrace{\left(4\,\mu\otimes d\,(\Delta^2)\right)}_{I_q+\int I(\theta)q(\theta)\,d\theta} \geqslant 1$$

soit l'inég. de van Trees !

On prouve donc (*) <u>directement</u> : (dans (*) on peut couper l'int. en 2 et éch. les $\int$, cf. on a toutes les majorations qu'il faut, voir calcul de $\mu\otimes d\,(\Delta^2)$ ...)

Contributions de ϑ :

(1) $$\int \eta_0(\theta)\xi_\theta(x)\ \eta_0(\theta)\dot{\xi}_\theta(x)\,\theta\ d\mu(x)\,d\theta \;=\; \int \theta\, q(\theta)\ \underbrace{\left(\mu\, \xi_\theta \dot{\xi}_\theta\right)}_{\substack{=0 \text{ par} \\ \text{inég. info}}} d\theta = 0$$

(2) $$2\int \eta_0(\theta)\underbrace{\xi_\theta(x)\,\xi_\theta(x)}_{\substack{f_\theta(x) \\ \text{et } \mu f_\theta = 1}}\dot{\eta}_0(\theta)\theta\, d\mu(x)\,d\theta \;=\; 2\int \theta\,\eta_0(\theta)\,\dot{\eta}_0(\theta)\,d\theta$$

↳ 2 solutions pour traiter ce terme :

(2.1) Inég. info : $\Psi(\alpha) = \int \theta\, q(\theta-\alpha)\, d\theta$

U vois. de 0, mq. bornitude :

$$\int \theta^2 q(\theta-\alpha)\,d\theta = \int (\theta+\alpha)^2 q(\theta)\,d\theta$$
$$\leq 2\int \theta^2 q(\theta)\,d\theta + \alpha^2$$

$< +\infty$ sous hyp (déjà croisée) :

(H_2) $\int \theta^2 q(\theta)\,d\theta < +\infty$

et donc ici, $\Psi(\alpha) = \int \theta\, q(\theta)\,d\theta + \alpha$

$$\Psi'(0) = 1 = 2\int \theta\ \eta_0(\theta)\,\dot{\eta}_0(\theta)\,d\theta.$$

(2.2) IPP :

$$2\,\eta_0(\theta)\,\dot{\eta}_0(\theta) = q'(\theta)\ \mathbb{1}_{\{q(\theta)>0\}} = q'(\theta) \quad \text{pp en } \theta$$

(car $q'=0$ pp sur $\{q=0\}$ comme on l'a vu en page 6)

$\theta \mapsto \theta \times q(\theta)$ est abs. cont. (comme produit de deux telles fonctions., cf. revenir à la déf. en utilisant abs. cont. $\Rightarrow$ continuité)

de dérivée pp. $\theta\, q'(\theta) + q(\theta)$

donc est l'intégrale de sa dérivée ;

$$\int_a^b \theta\, q'(\theta)\, d\theta = \int_a^b q(\theta)\, d\theta + [\theta\, q(\theta)]_a^b$$

donc $\downarrow$ 1 $\qquad\qquad \downarrow$ 1 $\qquad\qquad \downarrow$ 0 $\qquad$ hyp (H_3)

$\theta q(\theta) \to 0$
quand $\theta \to \pm\infty$

Rq: (H_3) et (H_2) vraie p. ex.
dès que q a un support compact (ce qui est l'hyp.
de Gill & Levit '95 p-ex.).
$\hookrightarrow$ J'ai le sentiment qu'on peut se débarrasser
des 2 sans doute facilement....

Contributions de T:

(3)
$$- \int \eta_0(\theta)\, \xi_\theta(x)\, \dot{\xi}_\theta(x)\, T(x)\, \eta_0(\theta)\, d\mu(x) d\theta$$

$$+ \int \eta_0(\theta)\, \xi_\theta(x)\, \xi_\theta(x)\, \dot{\eta}_0(\theta)\, T(x)\, d\mu(x)\, d\theta$$

$$= - \int q(\theta)\, (\mu\, \xi_\theta \dot{\xi}_\theta T)\, d\theta + \int \underbrace{\eta_0(\theta)\, \dot{\eta}_0(\theta)}_{= q'(\theta)/2}\, (P_\theta T)\, d\theta$$

si $\Psi(\theta) = P_\theta T$, on a (sous hyp.) $\frac{1}{2}\Psi'(\theta) = \mu(\xi_\theta \dot{\xi}_\theta T)$

soit ici, $\frac{1}{2}\left(- \int q(\theta)\, \Psi'(\theta)\, d\theta + \int q'(\theta)\Psi(\theta) d\theta \right)$

$$\overset{?}{=} \frac{1}{2}\, [q(\theta)\Psi(\theta)] \overset{?}{=} 0.$$

Pour avoir $\Psi'(\theta) = 2\mu(\xi_\theta \dot{\xi}_\theta T)$ hyp: (H_4) $\sup_{\theta \in V_\theta} P_\theta T^2 < +\infty$ $\forall\theta$ (où V_θ vois. de θ)

Pour avoir l'IPP, suffit que Ψ soit abs. continue; sa dérivée étant déf. partout, suffit qu'elle soit bornée sur tout compact (et IAF $\Rightarrow$ lipschitz.) :

(H'4) $\sup_{\theta \in K} P_\theta T^2 < +\infty$ $\forall K$ compact, plutôt

$$|\Psi'(\theta)| = 2\,|\mu\, \xi_\theta \dot{\xi}_\theta T| \underset{(C\text{-}S)}{\leq} 2\sqrt{I(\theta)} \cdot \sqrt{P_\theta T^2}$$

p. ex., $\sqrt{I}$ bornée sur tout cpct (H5) (continue est OK).

Enfin, il faut que $q(\theta)\,\psi(\theta) \underset{\theta \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$ (H6) qui est impliqué, p. ex., par q de support compact.

<u>Q</u> Peut-on améliorer (H'4), (H5) & (H6) ?

(H1) & (H2) me semblent OK

(H3) peut remplacer (H2) dans le calcul de la page 13 mais était nécessaire à d'autres endroits (p. ex. pour justifier des Fubini).